

# IL NUOVO CIMENTO

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

Vol. IX, N. 12

Serie nona

1 Dicembre 1952

## Sullo sparpagliamento laterale degli sciami alle basse energie.

G. POIANI e C. VILLI

*Istituto di Fisica dell'Università - Trieste*

(ricevuto il 4 Ottobre 1952)

**Riassunto.** — Si calcola lo sparpagliamento integrale di uno sciame nell'aria, mediato sullo sviluppo longitudinale, in base alla teoria della cascata elettrofotonica sviluppata, in approssimazione unidimensionale, dal gruppo di Padova. Le espressioni ricavate descrivono, in accordo con i risultati di ROBERG e NORDHEIM, lo sparpagliamento nella regione delle basse e medie energie. Nella regione delle alte energie esse si convertono nelle relazioni stabilite da BORSELLINO.

Seguendo i criteri e le approssimazioni usate in un precedente lavoro <sup>(1)</sup>, abbiamo valutato, alle basse energie, le grandezze integrali che definiscono lo sparpagliamento laterale degli sciami mediato sullo sviluppo longitudinale, ammettendo che la componente elettrofotonica in approssimazione verticale sia descritta dagli spettri integrali di bassa energia calcolati dal gruppo di Padova <sup>(2)</sup> <sup>(3)</sup> <sup>(4)</sup>. Le notazioni non esplicitate che qui compaiono corrispondono pertanto a quelle usate nei citati lavori.

Detti  $\bar{I}(E_0, E, t)$  e  $\bar{I}(E_0, W, t)$  gli spettri integrali degli elettroni e dei fotoni di energia  $E < \eta_0$  e, rispettivamente,  $W < \eta_0$ , lo sparpagliamento integrale, mediato sullo sviluppo longitudinale dello sciame, risulta definito dalle seguenti relazioni che, per  $N = 0, 1, 2$ , danno rispettivamente il valore medio quadratico dell'angolo di deviazione, dell'accoppiamento angolare laterale e della

<sup>(1)</sup> G. POIANI e C. VILLI: *Nuovo Cimento*, **9**, 825 (1952).

<sup>(2)</sup> N. DALLAPORTA e E. CLEMENTEL: *Nuovo Cimento*, **3**, 235 (1946).

<sup>(3)</sup> N. DALLAPORTA e G. POIANI: *Nuovo Cimento*, **4**, 1 (1947).

<sup>(4)</sup> E. CLEMENTEL e L. FABBRICHESI: *Nuovo Cimento*, **6**, 399 (1949); **5**, 77 (1948).

deviazione laterale:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{\langle \Theta^{2-N} R^N \rangle_E} = F^{-1}(E_0, E) \int_0^\infty \overline{\langle \Theta^{2-N} R^N \rangle_{E,t}} \bar{\Pi}(E_0, E, t) dt, \quad \text{componente elettronica} \\ \overline{\langle \Theta^{2-N} R^N \rangle_W} = G^{-1}(E_0, W) \int_0^\infty \overline{\langle \Theta^{2-N} R^N \rangle_{W,t}} \bar{\Gamma}(E_0, W, t) dt, \quad \text{componente fotonica} \end{array} \right.$$

in cui  $F(E_0, E)$  e  $G(E_0, W)$  sono le tracce integrali elettronica e fotonica:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(E_0, E) = \frac{E_0}{\eta_0} \left[ \sigma_0 + 2 \frac{C(1)}{A(1)} f(E, \eta_0, 1) + \frac{2\sigma_0 \Phi(E, 1)}{A(1)} \frac{p(E, 0, 1) - q(E, 0, 1)}{\varepsilon'} \right] \frac{1}{\lambda_2(1) \lambda_1'(1)}, \\ G(E_0, W) = \frac{E_0}{\varepsilon'} \left[ \sigma_0 \int_W^{\eta_0} \frac{g(W, 1)}{-\lambda_0(W, s)} dW + \frac{\varepsilon'}{\eta_0} C(1) \right] \frac{1}{\lambda_2(1) \lambda_1'(1)}. \end{array} \right.$$

Nella valutazione delle  $L$ -trasformate si sono usate le espressioni complete di Rossi-Greisen (cfr. <sup>(5)</sup>; formule (2.37)) allo scopo di tenere conto dell'effetto dei poli sull'asse reale negativo del piano  $(\lambda, s)$ , conseguenza del processo moltiplicativo.

Inoltre, onde evitare incontrollate approssimazioni ed in vista della necessità di calcolare derivate sino al secondo ordine rispetto al parametro di trasformazione  $\lambda$ , si è evitato di esprimere la funzione  $B_2(E_0, E)$  (cfr. <sup>(3)</sup>, pag. 7) tramite la funzione  $\Phi(E, s)$  scrivendola, tenuto conto della correzione di polo, nella forma:

$$B_2(E_0, E, \lambda) = \frac{1}{i\pi\eta_0} \sum_0^2 \left( \frac{4}{3} + 2b \right)^k_e (-1)^{2-q} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\sigma_0 + \lambda}{[\lambda - \lambda_1(s)][\lambda - \lambda_2(s)]} \times \\ \times \left( \frac{E_0}{\varepsilon'} \right)^s \left( \frac{E}{\eta_0} \right)^{2-q} \xi(E, \lambda, 3-q) ds,$$

$$\xi(E, \lambda, 3-q) = - \int_E^{\eta_0} \left( \frac{\eta_0}{W} \right)^{3-q} \frac{\varphi(W) + \chi(W)}{\lambda - \lambda_0(W, s)} g(W, s) dW;$$

<sup>(5)</sup> B. ROSSI e K. GREISEN: *Rev. Mod. Phys.*, **13**, 241 (1941).

$$g(W, s) = \left( \frac{4}{3} + 2b \right) \left\langle \frac{1}{sW} - \frac{s}{s+1} \frac{1}{\varepsilon'} \right\rangle + \frac{s}{s+2} \frac{W}{\varepsilon'^2},$$

$$k_0 = k_1 = 1; \quad k_2 = 0.$$

Applicando il teorema della Faltung e servendosi di elementari proprietà della trasformazione di Laplace, le (1) si possono scrivere nella forma:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{\langle \Theta^{2-N} R^N \rangle}_E = E_c^2 F^{-1}(E_0, E) \left\langle \int_{\eta_0}^{\infty} L_{\pi}(E_0, E', \lambda, s) \frac{\partial^N}{\partial \lambda^N} L_{II}(E', E, \lambda, r) \frac{dE'}{E'^2} \right\rangle_{\lambda=0}, \\ \overline{\langle \Theta^{2-N} R^N \rangle}_W = E_c^2 G^{-1}(E_0, W) \left\langle \int_{\eta_0}^{\infty} L_{\pi}(E_0, E', \lambda, s) \frac{\partial^N}{\partial \lambda^N} L_{I'}(E', W, \lambda, r) \frac{dE'}{E'^2} \right\rangle_{\lambda=0}. \end{array} \right.$$

L'integrale sull'energia  $E'$ , calcolato dopo aver esplicitato le  $L$ -trasformate degli spettri elettronico e fotonico di bassa energia, fornisce al successivo integrale in campo complesso un polo nel punto  $r = s + 2$ . Applicando il teorema dei residui si ottiene:

$$(4a) \quad \overline{\langle \Theta^{2-N} R^N \rangle}_E = \left( \frac{E_c}{\beta} \right)^2 \sum_1^4 I_k^{(N)}(E) = \left( \frac{E_c}{\beta} \right)^2 f_N(E), \quad E < \varepsilon',$$

$$(4b) \quad \overline{\langle \Theta^{2-N} R^N \rangle}_W = \left( \frac{E_c}{\beta} \right)^2 \sum_1^2 J_k^{(N)}(W) = \left( \frac{E_c}{\beta} \right)^2 \varphi_N(W), \quad W < \varepsilon',$$

in cui:

$$(5a) \quad I_k^{(N)}(E) = - \frac{E_0 H_1(1) \gamma_k}{\eta_0 \alpha_k \lambda'_1(1) F(E_0, E)} \left( \frac{\beta}{\alpha_k} \right)^2 \left( \frac{\eta_0 - E}{\varepsilon' + E} \right)^{2-N} \frac{\partial^N}{\partial \lambda^N} [\Omega_k(E, \lambda, s+2)]_{\lambda=0}; \quad k=1, 2, 3, 4,$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \eta_0; \quad \alpha_3 = -\alpha_4 = \varepsilon'; \quad \gamma_1 = \gamma_2 = [(\eta_0 - E)/(\varepsilon' + E)]^{N-2}; \quad \gamma_3 = \gamma_4 = 1.$$

$$(5b) \quad J_k^{(N)}(W) = - \frac{E_0 H_1(1) \omega_k}{\delta_k \lambda'_1(1) G(E_0, W)} \left( \frac{\beta}{\delta_k} \right)^2 \left( \frac{\eta_0 - W}{\varepsilon' + W} \right)^{2-N} \frac{\partial^N}{\partial \lambda^N} [O_k(W, \lambda, s+2)]_{\lambda=0}, \quad k=1, 2,$$

$$\delta_1 = \eta_0; \quad \delta_2 = \varepsilon'; \quad \omega_1 = [(\eta_0 - W)/(\varepsilon' + W)]^{N-2}; \quad \omega_2 = 1.$$



Le funzioni che compaiono nelle (5a, b) sono espresse da

$$\begin{aligned}
 \Omega_1(E, \lambda, s+2) &= \frac{\sigma_0 + \lambda}{(s+2)[\lambda - \lambda_1(s+2)][\lambda - \lambda_2(s+2)]}, \\
 \Omega_2(E, \lambda, s+2) &= \frac{C(s+2)f(E, \eta_0, s+2)}{(s+2)[\lambda - \lambda_1(s+2)][\lambda - \lambda_2(s+2)][\lambda + A(s)]}, \\
 \Omega_3(E, \lambda, s+2) &= \frac{2(\sigma_0 + \lambda)P(E, \lambda, s+2)}{[\lambda - \lambda_1(s+2)][\lambda - \lambda_2(s+2)][\lambda + A(s)]}, \\
 \Omega_4(E, \lambda, s+2) &= \frac{2(\sigma_0 + \lambda)Q(E, \lambda, s+2)}{[\lambda - \lambda_1(s+2)][\lambda - \lambda_2(s+2)][\lambda + A(s)]}; \\
 P(E, \lambda, s+2) &= \left(\frac{4}{3} + 2b\right) \eta_0 \sum_0^1 (-1)^e \frac{p_{3-e}(E, \lambda, s+2)}{3-e} + p(E, \lambda, s+2), \\
 Q(E, \lambda, s+2) &= \left(\frac{4}{3} + 2b\right) \sum_0^1 (-1)^e \frac{2-e}{\eta_0^{2-e}} \times \\
 &\quad \times \int_E^{\eta_0} dE' \int_{E'}^{\eta_0} \frac{E'' \xi(E'', \lambda, 3-e) - E''^2 \xi'(E'', \lambda, 3-e)}{E''^e} \times \\
 &\quad \times \exp \left[ -\frac{\lambda + A(s)}{\beta} (E'' - E) \right] dE'' + q(E, \lambda, s+2); \\
 O_1(W, \lambda, s+2) &= \frac{C(s+2)}{(s+2)[\lambda - \lambda_1(s+2)][\lambda - \lambda_2(s+2)]}, \\
 O_2(W, \lambda, s+2) &= \int_W^{\eta_0} \frac{g(W, \lambda, s+2)}{\lambda - \lambda_0(W, s+2)} dW; \\
 p_{3-e}(E, \lambda, s+2) &= \eta_0 \int_E^{\eta_0} \frac{p(W) + \chi(W)}{\lambda - \lambda_0(W, s+2)} g(W, s+2) \left[ 1 - \frac{E^{3-e}}{W^{3-e}} \right] dW.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Le funzioni  $p(E, \lambda, s+2)$  e  $q(E, \lambda, s+2)$ , che tiene conto della ionizzazione, corrispondono alle (7) (8) del lavoro citato <sup>(4)</sup>, nelle quali però non compare la correzione di polo, inessenziale nella teoria verticale. Le (5) sono valide nella regione delle basse energie ( $E < \varepsilon'$ ,  $W < \varepsilon'$ ) in cui le perdite radiative sono trascurabili rispetto a quelle per ionizzazione.

Nella regione delle medie energie, che supporremo limitata fra  $\varepsilon'$  e  $\eta_0$ , corrispondenti ai limiti per le sezioni d'urto asintotiche di formazione di coppie



e di bremsstrahlung, le precedenti funzioni si modificano in quanto la funzione  $g(W, s+2)$  si muta nella funzione  $C(s+2)/W$  e, come conseguenza della sensibile diminuzione del termine correttivo sulla sezione d'urto totale coppie + Compton, la funzione  $-\lambda_0(W, s+2)$  tende al valore asintotico  $\sigma_0 = 0,773$ . Indicando con  $\bar{I}_k^{(N)}(E)$  e  $\bar{J}_k^{(N)}(W)$  i nuovi valori che si ottengono per le (5) dopo aver posto  $\gamma_k = 1$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ), ed  $\omega_k = 1$  ( $k = 1, 2$ ) e sostituito  $\beta$  con  $E$  e, rispettivamente, con  $W$ , le (4) divengono nella regione delle medie energie:

$$(7a) \quad \overline{\langle \Theta^{2-N} R^N \rangle}_E = \left( \frac{E_c}{E} \right)^2 \sum_1^4 \bar{I}_k^{(N)}(E) = \bar{f}_N(E) \left( \frac{E_c}{E} \right)^2, \quad \varepsilon' \leq E < \eta_0$$

$$(7b) \quad \overline{\langle \Theta^{2-N} R^N \rangle}_W = \left( \frac{E_c}{W} \right)^2 \sum_1^2 \bar{J}_k^{(N)}(W) = \bar{\varphi}_N(W) \left( \frac{E_c}{W} \right)^2, \quad \varepsilon' \leq W < \eta_0.$$

Nella regione delle alte energie le (7) divengono:

$$(8a) \quad \overline{\langle \Theta^{2-N} R^N \rangle}_E = - \left( \frac{E_c}{E} \right)^2 \frac{\lambda_2(1) H_1(1)}{3\sigma_0} \frac{\partial^N}{\partial \lambda^N} \times \\ \times \left[ \frac{\sigma_0 + \lambda}{[\lambda - \lambda_1(s+2)][\lambda - \lambda_2(s+2)]} \right]_{\lambda=0} = \left( \frac{E_c}{E} \right)^2 f_N; \quad E > \eta_0,$$

$$(8b) \quad \overline{\langle \Theta^{2-N} R^N \rangle}_W = - \left( \frac{E_c}{E} \right)^2 \frac{\lambda_2(1) H_1(1) C(3)}{3C(1)} \frac{\partial^N}{\partial \lambda^N} \times \\ \times \left[ \frac{1}{[\lambda - \lambda_1(s+2)][\lambda - \lambda_2(s+2)]} \right]_{\lambda=0} = \left( \frac{E_c}{W} \right)^2 \varphi_N; \quad W > \eta_0,$$

in quanto al limite per  $E$  e  $W$  tendente all'energia  $\eta_0$  si ha  $\bar{I}_k^{(N)}(E) = \bar{J}_k^{(N)}(W) = 0$  per  $k \neq 1$  e le tracce integrali (2) si identificano con le tracce calcolate in approssimazione « A » <sup>(6)</sup>.

Nella Tabella I sono confrontati i valori dell'angolo e della deviazione quadratica, mediati sullo sviluppo longitudinale dello sciame, calcolati secondo le formule (4) (7) (8), con quelli ottenuti da ROBERG e NORDHEIM <sup>(7)</sup>. Il valore  $\beta = 86$  MeV assunto da questi Autori invece di  $\beta = 98$  MeV, com'è stato

<sup>(6)</sup> A. BORSELLINO: *Nuovo Cimento*, **6**, 543 (1949); **7**, 323 (1950); **7**, 638 (1950).

<sup>(7)</sup> J. ROBERG e L. W. NORDHEIM: *Phys. Rev.*, **75**, 444 (1949).

TABELLA I.

$E/\beta$ $W/\beta$	ROBERG e NORDHEIM		Formule (4a) (7a) (8a)	
	$\langle \Theta^2 \rangle_E$	$\langle R^2 \rangle_E$	$\langle \Theta^2 \rangle_E$	$\langle R^2 \rangle_E$
$\infty$	$(E_c/E)^2$ 0,182	$(E_c/E)^2$ 0,214	$(E_c/E)^2$ 0,1896	$(E_c/E)^2$ 0,2417
10	0,16	0,18		
7	0,15	0,17		
5	0,14	0,16	0,14	0,17
3	0,13	0,140	0,115	0,15
2	0,11	0,125	0,11	0,13
1,5	0,095	0,105	0,10	0,11
1	$(E_c/\beta)^2$ 0,085	$(E_c/\beta)^2$ 0,085	$(E_c/\beta)^2$ 0,08	$(E_c/\beta)^2$ 0,08
0,75	0,135	0,120	0,13	0,10
0,5	0,22	0,165	0,21	0,11
0,4	0,28	0,190	0,25	0,20
0,3	0,35	0,235	0,30	0,27
0,2	0,57	0,31	0,46	0,37
0,15	0,80	0,48	0,64	0,44
0,10	1,23	0,46	0,88	0,52
0,05	2,3	0,64	1,25	0,57

$E/\beta$ $W/\beta$	ROBERG e NORDHEIM		Formule (4b) (7b) (8b)	
	$\langle \Theta^2 \rangle_W$	$\langle R^2 \rangle_W$	$\langle \Theta^2 \rangle_W$	$\langle R^2 \rangle_W$
$\infty$	$(E_c/W)^2$ 0,060	$(E_c/W)^2$ 0,38	$(E_c/W)^2$ 0,0586	$(E_c/W)^2$ 0,2508
10	0,054	0,32		
7	0,050	0,285		
5	0,047	0,260	0,042	0,22
3	0,040	0,220	0,036	0,20
2	0,036	0,195	0,038	0,18
1,5	0,034	0,175	0,030	0,17
1	$(E_c/\beta)^2$ 0,029	$(E_c/\beta)^2$ 0,155	$(E_c/\beta)^2$ 0,025	$(E_c/\beta)^2$ 0,125
0,75	0,043	0,255	0,035	0,23
0,5	0,062	0,42	0,050	0,37
0,4	0,076	0,53	0,065	0,47
0,3	0,100	0,72	0,085	0,62
0,2	0,145	1,02	0,125	0,92
0,15	0,185	1,30	0,155	1,20
0,10	0,26	1,80	0,205	1,68
0,05	0,40	2,70	0,275	2,09

assunto nei nostri calcoli, influisce in modo poco rilevante sui valori relativi alla componente elettronica e in modo piuttosto sensibile su quelli della componente fotonica. Per valori del rapporto  $E/\beta$  e  $W/\beta$  maggiori di 6,4 le precedenti relazioni forniscono i valori asintotici dello sparpagliamento laterale. Questo fatto, che è diretta conseguenza delle condizioni imposte nella teoria verticale, impedisce di descrivere il comportamento laterale dello sciame nella parte bassa delle alte energie.

Ringraziamo i laureandi B. DEQUAL e L. TAFFARA che hanno eseguito i lunghi calcoli numerici.

#### SUMMARY

The integral spread, averaged over the longitudinal extension of an air shower, is calculated according with the unidimensional theory of the electrophotonic cascade developed by the Padua group. The expressions thus derived, which give numerical results in accordance with ROBERG and NORDHEIM's ones, describe the lateral spread in the low and medium energy region. In the high energy region they give the relations stated by BORSELLINO.



## Über die Ausbreitung sehr langer elektrischer Wellen um die Erde und die Signale des Blitzes.

W. O. SCHUMANN

*Elektrophysikalisches Institut der Technischen Hochschule - München*

(ricevuto il 5 Ottobre 1952)

**Zusammenfassung.** — Es wird mit Hilfe der Methode der singulären Eigenfunktionen eine Formel für die Ausbreitung langer elektrischer Wellen um die Erde mit Berücksichtigung der Ionosphäre aufgestellt. Mit Hilfe der gewonnenen Formel wird die Ausbreitung elektromagnetischer Signale einer Blitzentladung durch Fourierintegration gewonnen, indem für den zeitlichen Verlauf einer Blitzentladung einige einfache, prinzipiell verschiedene Zeitabhängigkeiten angenommen werden.

### 1. — Ausbreitung dieser Wellen um die Erde.

Schon seit längerer Zeit besteht das Bedürfnis, für die Wellenausbreitung eines Dipols auf große Entfernungen eine einfache, leicht übersehbare Formel zu haben, die exakt begründet ist. Dies läßt sich in einfacher Form nur für lange elektrische Wellen durchführen, deren radiale Verteilung sich durch eine Taylorreihe angenähert darstellen läßt. Für diese Wellen ist der Ausbreitungsraum praktisch die Luftschicht zwischen der Erde und der Unterkante der *D* Schicht der Ionosphäre in ca 60-70 km Höhe. Die *D* Schicht selbst verhält sich wie ein Leiter von der Leitfähigkeit  $\alpha$ , etwa wie von Süßwasser. Da die Dämpfung der Wellen in der *D* Schicht weitaus größer ist als an der Erdoberfläche, kann man das Problem so idealisieren, daß eine Kugel im Radius  $r = a$  mit dem Leitwert unendlich, umgeben ist von einer konzentrischen Luftschicht und diese wiederum für  $r = b$  begrenzt ist durch eine homogene Schicht eines Leiters. Schon G. N. WATSON <sup>(1)</sup> hat in seiner klassischen Arbeit

<sup>(1)</sup> G. N. WATSON: *Proc. Roy. Soc. London.*, A **95**, 546 (1919); s. a. W. O. SCHUMANN: *Zeits. f. ang. Phys.*, B. **4**, Heft 12 (1952) wo diese Methode benutzt ist.

dieses Problem ganz allgemein behandelt und es durch seine berühmte Transformation gelöst. Wir wollen aber keinen Gebrauch davon machen, sondern eine neuere Methode anwenden, die meines Wissens zuerst von H. G. BOOKER und W. WALKINSHAW<sup>(2)</sup> angewendet wurde und unabhängig davon von A. SOMMERFELD<sup>3)</sup> als Methode der «singulären» Eigenfunktionen beschrieben wurde. Diese Methode ist weniger abstrakt und dem Denken des H. F. Technikers näherliegend.

Setzen wir die Maxwell'schen Gleichungen für ein sphärisches Koordinatensystem an  $(r, \theta, \varphi)$  und nehmen keine Abhängigkeit von  $\varphi$  an, so können wir für die Feldkomponenten  $E_r$ ,  $E_\theta$  und  $H_\varphi$ , die uns speziell für den vertikalen Dipol interessieren, mit dem zeitlichen Gesetz  $\exp[j\omega t]$  schreiben:

$$(1) \quad E_r = \frac{j}{r \sqrt{\varepsilon} \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} \right), \quad E_\theta = \frac{-j}{r \sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial^2 (r \Pi)}{\partial \theta \partial r}, \quad H_\varphi = -\omega \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \Pi}{\partial \theta},$$

wobei die Funktion  $\Pi$  die dreidimensionale Wellengleichung

$$(2) \quad \Delta \Pi + k^2 \Pi = 0, \quad k = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\varepsilon \mu},$$

zu erfüllen hat. Besitzt das Medium Leitfähigkeit  $\kappa$ , so ist für  $\varepsilon$  der Wert  $-\kappa/j\omega$  zu setzen. Die Funktion  $\Pi$  hat die Grenzbedingungen  $E_\theta = 0$ , bei  $r = a$ , Erdoberfläche, und  $E_\theta$  und  $H_\varphi$  stetig bei  $r = b$ , Grenze Luft-Ionosphäre zu erfüllen. Es gilt also

$$(3) \quad \begin{cases} r = a & \frac{\partial r \Pi}{\partial r} = 0, \\ r = b & \left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial r \Pi}{\partial r} \right)_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial r \Pi}{\partial r} \right)_2, \quad (\sqrt{\varepsilon} \Pi)_1 = (\sqrt{\varepsilon} \Pi)_2. \end{cases}$$

Es folgt daraus, daß  $(\Pi \partial r \Pi / \partial r)$  an der Grenze  $r = b$  stetig ist, was für später wichtig ist. Befindet sich an der Stelle  $\theta = 0$ ,  $r = r_0$  ein senkrecht, radial gerichteter Dipol, so ist dessen Potentialfunktion, ohne Störung durch die Erde und die Ionosphäre durch

$$(4) \quad \Pi_0 = \frac{Jl}{4\pi r_0 \omega \sqrt{\varepsilon}} \frac{\exp[-jkR]}{R},$$

<sup>(2)</sup> H. G. BOOKER und W. WALKINSHAW: Conference of the Phys. Soc. and of the Royal Meteorological Soc. 8th April 1946, Appendix II (beschrieben in H. BREMMER: *Terrestrial Radio Waves*, (1949), S. 202).

<sup>(3)</sup> A. SOMMERFELD: *Partielle Differentialgleichungen* (Leipzig, 1947), S. 216.

gegeben, wobei  $J$  der Strom,  $l$  die Länge des Dipols und  $R$  der Abstand des Punktes vom Ort des Dipols ist. Die Funktion  $\Pi$  muss also nahe am Ort des Dipols in die durch (4) vorgeschriebene Singularität übergehen.

Die Lösung der Differentialgleichung (2) führt auf Kugelfunktionen  $P_\nu(\cos \theta)$  und Bessel'sche Funktionen

$$\xi_\nu^{1,2} = \sqrt{\frac{\pi}{2\varrho}} H_{\nu+1/2}^{1,2}(\varrho), \quad \varrho = kr.$$

Die Potentialfunktion ist also, abgesehen von einem später zu bestimmenden konstanten Faktor im Luftraum gegeben durch

$$(5) \quad [\xi_\nu^1(k_1 r) + c_1 \xi_\nu^2(k_1 r)] \cdot P_\nu(\cos \theta) = \chi_\nu(k_1 r) P_\nu(\cos \theta),$$

und in der Ionosphäre durch

$$(6) \quad c_2 \xi_\nu^2(k_2 r) P_\nu(\cos \theta), \quad k_2 = \sqrt{\omega \mu \kappa} \cdot \exp[-j\pi/4].$$

Die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  werden durch die Grenzbedingungen (3) bestimmt.

Die Grenzbedingungen bestimmen nun nach der Methode der singulären Eigenfunktionen die Ordnung  $\nu$  der Funktionen durch die transzendente Gleichung

$$(7) \quad \eta_\nu^{1'}(\varrho_b) \eta_\nu^{2'}(\varrho_a) - \eta_\nu^{2'}(\varrho_b) \eta_\nu^{1'}(\varrho_a) - \frac{k_1}{k_2} \frac{\eta_\nu^{2'}(k_2 b)}{\eta_\nu^2(k_2 b)} [\eta_\nu^1(\varrho_b) \eta_\nu^{2'}(\varrho_a) - \eta_\nu^2(\varrho_b) \cdot \eta_\nu^{1'}(\varrho_a)] = 0.$$

mit

$$\varrho_b = k_1 b, \quad \varrho_a = k_1 a, \quad \eta_\nu^{1,2}(\varrho) = \varrho \xi_\nu^{1,2}(\varrho) = \sqrt{\frac{\pi \varrho}{2}} H_{\nu+1/2}^{1,2}(\varrho).$$

WATSON hat in <sup>(1)</sup> gezeigt, daß der erste Teil der Gleichung (7), der bei unendlich gut leitender Ionosphäre ( $\kappa \rightarrow \infty$ ) allein auftritt, unendlich viele, rein imaginäre Wurzeln hat, und eine endliche Zahl reeller Wurzeln zwischen den Grenzen  $\pm k_1 b$ . Das zweite Glied, das nur bei leitender Ionosphäre auftritt, ergibt zusätzliche komplexe Glieder, die zu den oben erwähnten Wurzeln hinzuzufügen sind.

Auf Grund der Tatsache, daß die Luftschichtdicke  $b - a \approx 70$  km sehr klein gegen den Erdradius  $a = 6350$  km ist, versuchen wir für lange Wellen ( $\lambda$  in der Größenordnung von  $\approx 70$  km) eine Näherungslösung zu erhalten, indem wir  $\eta$  in eine Taylorreihe bis zur 4. Ableitung entwickeln:

$$(8) \quad \eta(\varrho + \Delta\varrho) = \eta(\varrho) + \eta'(\varrho) \Delta\varrho + \eta''(\varrho) \frac{\Delta\varrho^2}{2} + \eta'''(\varrho) \cdot \frac{\Delta\varrho^3}{6} + \eta''''(\varrho) \frac{\Delta\varrho^4}{24} \dots$$

$$\varrho = k_1 a, \quad \Delta\varrho = k_1(b - a) = k_1 H, \quad \frac{\Delta\varrho}{\varrho} = \frac{b - a}{a} \ll 1.$$



Die höheren Differentialquotienten bestimmen wir aus der Differentialgleichung für  $\eta$

$$(9) \quad \eta''(\varrho) + \left(1 - \frac{\nu(\nu+1)}{\varrho^2}\right) \eta(\varrho) = 0,$$

und erhalten mit Benützung der bekannten Beziehung

$$(10) \quad \eta_\nu^1(\varrho) \eta_\nu^{2'}(\varrho) - \eta_\nu^2(\varrho) \eta_\nu^{1'}(\varrho) = -2j,$$

$$(11) \quad \eta_\nu^{1'}(\varrho_b) \eta_\nu^{2'}(\varrho_a) - \eta_\nu^{2'}(\varrho_b) \eta_\nu^{1'}(\varrho_a) =$$

$$-2j \left\{ \left(1 - \frac{\nu(\nu+1)}{\varrho^2}\right) A\varrho - \frac{\nu(\nu+1)}{\varrho^3} A\varrho^2 - \left[ \frac{\nu(\nu+1)}{\varrho^4} - \left(1 - \frac{\nu(\nu+1)}{\varrho^2}\right)^2 \frac{1}{6} \right] A\varrho^3 \right\}.$$

Für eine vollkommen leitende Ionosphäre,  $z \rightarrow \infty$ , ist dieser Ausdruck nach Gleichung (7) gleich Null zu setzen und ergibt den dann in Frage kommenden Wert von  $\nu = \nu_0$ . Wie man sieht, genügt  $\nu_0(\nu_0 + 1)/\varrho^2 = 1$  für alle  $A\varrho$  dieser Gleichung, wenn berücksichtigt wird, daß  $A\varrho/\varrho \ll 1$  ist. Es ist also in dieser Näherung  $\nu_0(\nu_0 + 1) = k_1^2 a^2$  zu setzen und  $\nu_0$  ist eine große Zahl, da

$$k_1 a = \frac{2\pi a}{\lambda} = \frac{40\,000}{\lambda_{\text{km}}}.$$

( $\lambda$  Wellenlänge), selbst für sehr lange Wellen.

Wendet man dasselbe Verfahren auf das zweite Glied der Gleichung (7) an, so entsteht

$$(12) \quad \eta_\nu^1(\varrho_b) \eta_\nu^{2'}(\varrho_a) - \eta_\nu^2(\varrho_b) \eta_\nu^{1'}(\varrho_a) = 2j \left[ 1 - \left(1 - \frac{\nu(\nu+1)}{\varrho^2}\right) \frac{A\varrho^2}{2} - \frac{\nu(\nu+1)}{\varrho^3} \frac{A\varrho^3}{3} \right] \dots$$

bei dem der Wert der Klammer sehr nahe an 1 liegt, so lange  $A\varrho^3/3\varrho$  klein gegen 1 ist, d.h. sobald die Wellenlänge  $\lambda > 2\pi H\sqrt{H/3a}$  ist,  $H = b - a$  Höhe der Luftschicht,  $a$  Radius der Erde; für  $a/H \approx 100$  muß  $\lambda > 0,35 H$  sein.

Aus der Gleichung (7) wird also angenähert, wenn man voraussetzt, daß sich  $\nu(\nu+1)/\varrho^2$  nur sehr wenig von 1 unterscheidet:

$$(13) \quad A\varrho \left(1 - \frac{\nu(\nu+1)}{\varrho^2}\right) + \frac{k_1}{k_2} \frac{\eta_\nu^{2'}(k_2 b)}{\eta_\nu^2(k_2 b)} = 0.$$

Da  $|k_1/k_2| \ll 1$  ist, bedeutet das 2. Glied nur eine kleine Korrektur von  $\nu$ .

Da

$$(14) \quad \frac{\eta_v^{2'}(\varrho)}{\eta_v^2(\varrho)} = -\frac{\nu}{\varrho} + \frac{H_{\nu-1/2}^2(\varrho)}{H_{\nu+1/2}^2(\varrho)} \quad \text{und} \quad \frac{H_\mu^2(\varrho)}{H_{\mu+1}^2(\varrho)} = -j, \quad \text{da } k_2 b \gg \nu = k_1 a, \quad (4),$$

folgt

$$(15) \quad \frac{\nu(\nu+1)}{\varrho_a^2} = 1 - \frac{1}{k_2 H} \left( \frac{\nu}{k_2 b} + j \right) \approx 1 - \frac{j}{k_2 H},$$

und hieraus mit

$$(16) \quad k_2 = \sqrt{\omega \mu \kappa} \exp[-j\pi/4] \quad \text{und} \quad \varrho_a \gg 1, \\ \nu + \frac{1}{2} = \varrho_a \left( 1 + \frac{1}{2H\sqrt{j\omega\mu\kappa}} \right) = \omega \frac{a}{c} - j \frac{a}{2H} \cdot \frac{\sqrt{j\omega}}{\sqrt{\kappa\mu}} \cdot \frac{1}{c}.$$

Es folgt hieraus eine Dämpfung der Wellen von der Größe

$$\exp \left( -\frac{a}{2Hc} \sqrt{\frac{\omega}{2\mu\kappa}} \right),$$

die schon Watson abgeleitet hat <sup>(1)</sup> S. 1.) und eine Eindringtiefe, Abfall der Amplitude auf  $1/e$ , in die Ionosphäre bei  $\kappa = 10^{-1}$   $1/\Omega m$ ,  $H = 70$  km,  $a = 6370$  km, für  $\lambda = 30$  km, von  $\sim 1/2$  km, bei  $f = 10$  Hz,  $\lambda = 30000$  km von  $\sim 15$  km.

Da die Ordnung  $\nu$  eine komplexe und nicht ganze Zahl wird, enthält die Kugelfunktion  $P_\nu(\cos \theta)$  bei  $\theta = \pi$  eine singuläre Stelle, wo sie logarithmisch unendlich wird. Die Funktionen  $\chi_\nu(k_1 r) P_\nu(\cos \theta)$  und  $\xi_\nu^2(k_2 r) P_\nu(\cos \theta)$  nach Gl. (5) und (6) werden deshalb von SOMMERFELD als « singuläre » Eigenfunktionen bezeichnet. Physikalisch bedeutet das, daß an der singulären Stelle sich eine lokal konzentrierte Strahlungsquelle befindet, und wir werden im Folgenden unsere Potentialfunktion dem singulären Charakter des Hertz'schen Dipols nach Gl. (4) für  $R \rightarrow 0$  anzupassen haben. Für Kugelfunktionen hoher Ordnung gilt die Näherungsformel

$$P_\nu(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi \nu}} \frac{\cos \left| \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right|}{\sin \theta}, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Für komplexes  $\nu$  mit positiv reellem Teil wie hier ist die Kugelfunktion für  $\theta \rightarrow 0$  regulär,  $P_\nu(+1) \rightarrow 1$  und divergiert für  $\theta \rightarrow \pi$  als

$$(7a) \quad P_\nu(\cos \theta) \underset{\cos \theta \rightarrow -1}{=} \frac{\sin \nu \pi}{\pi} \log (\pi - \theta)^2 \dots$$

(4) s.a. W. O. SCHUMANN: *Zeits. f. Naturfor.*, 7a, 15 (1952).

Nehmen wir unsere Strahlungsquelle bei  $\theta = 0$  an, so haben wir statt  $\theta \rightarrow \pi - \theta$  zu setzen und erhalten als Darstellung

$$P_\nu(-\cos \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi \nu \sin \theta}} \cos \left[ \left( \nu + \frac{1}{2} \right) (\pi - \theta) - \frac{\pi}{4} \right].$$

Ist  $\nu$  komplex, so wird mit  $\cos z = (1/2) (\exp [jz] + \exp [-jz])$

$$(18) \quad P_\nu(-\cos \theta) = \sqrt{\frac{1}{2\pi \nu \sin \theta}} \cdot \exp \left[ j \left( \nu + \frac{1}{2} \right) (\pi - \theta) - \frac{\pi}{4} \right] = \\ = \sqrt{\frac{1}{2\pi \nu j \sin \theta}} \cdot \exp \left[ j \left( \nu + \frac{1}{2} \right) (\pi - \theta) \right],$$

wenn die Exponentialfunktion mit negativ imaginärem Teil als unbedeutend weggelassen wird.

Die Potentialfunktion  $\Pi$  wird nun in der Form

$$(19) \quad \Pi(r, \theta) = \sum_\nu D_\nu \psi_\nu(k_1 r) P_\nu(-\cos \theta),$$

angesetzt, wobei im Luftraum

$$(20) \quad \psi_\nu(k_1 r) = \chi_\nu(k_1 r) = \xi_\nu^1(k_1 r) + c_1 \xi_\nu^2(k_1 r),$$

(s. Gl. (5)) und in der Ionosphäre

$$(21) \quad \psi_\nu(k_2 r) = c_2 \xi_\nu^2(k_2 r),$$

bedeutet. In unserem vereinfachten Fall reduziert sich die Summe auf ein einziges Glied, da sich nur *ein* Wert von  $\nu$  aus Gl. (7) bzw. Gl. (13) ergibt. Die Faktoren  $D_\nu$  können bestimmt werden, da die Funktionen  $\psi_\nu$  für verschiedene Indizes  $\nu$  zu einander orthogonal sind. Dies folgt aus der Differentialgleichung der  $\psi$  Funktion

$$(22) \quad r \frac{d^2(r\psi_\nu)}{dr^2} + [k^2 r^2 - \nu(\nu + 1)] \psi_\nu = 0,$$

die sowohl im Luftraum als auch in der Ionosphäre gilt. Schreibt man die Differentialgleichungen für die Funktion  $\psi_\nu$  und  $\psi_\mu$  hin, multipliziert die erste mit  $\psi_\mu$  und die zweite mit  $\psi_\nu$  und subtrahiert beide Ausdrücke und integriert so entsteht

$$(23) \quad [\nu(\nu + 1) - \mu(\mu + 1)] \int_a^\infty \psi_\nu \psi_\mu dr = \left[ r \psi_\mu \frac{\partial(r\psi_\nu)}{\partial r} - r \psi_\nu \frac{\partial(r\psi_\mu)}{\partial r} \right]_a^\infty.$$



Diese Integration ist von  $r = a$  bis  $r = \infty$  durchzuführen. Dabei wird auch die Grenze  $r = b$  durchschnitten. An dieser Grenze ist aber nach Gl. (3)  $r\psi_\mu \partial(r\psi_\mu)/\partial r$  stetig, und der Ausdruck in Gl. (23) ebenfalls. Er trägt also zum Integral nichts bei. Da nun für  $r = a$ ,  $\partial(r\psi)/\partial r$  verschwindet, und für  $r = \infty$  wegen des asymptotischen Verlaufs der Hankelfunktion der ganze Ausdruck verschwindet, ist

$$\int_a^\infty \psi_\nu \psi_\mu dr = 0.$$

Um die Normierungsintegrale  $\int_a^\infty \psi_r^2 dr$  zu finden, bestimmt man nach Gl. (23)

$$N_\nu = \lim_{\mu \rightarrow \nu} \int_a^\infty \psi_\mu \psi_\nu dr = \lim_{\mu \rightarrow \nu} \left[ \frac{r\psi_\mu \frac{\partial(r\psi_\nu)}{\partial r} - r\psi_\nu \frac{\partial(r\psi_\mu)}{\partial r}}{[\nu(\nu+1) - \mu(\mu+1)]} \right]_a^\infty,$$

indem man Zähler und Nenner nach  $\mu$  differenziert und dann zur Grenze übergeht. Man erhält dann

$$N_\nu = \frac{\frac{\partial(r\psi_\nu)}{\partial r} \cdot \frac{\partial(r\psi_\nu)}{\partial r} - r\psi_\nu \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi_\nu)}{-(2\nu+1)} \quad \begin{matrix} r = \infty \\ r = a \end{matrix}.$$

Um diesen Ausdruck auszuwerten, ist es besser, von den Funktionen  $\psi_\nu$  zu den Funktionen  $\Phi_\nu = \varrho \psi_\nu(\varrho)$  überzugehen, d.h. von den Funktionen

$$\xi_\nu(\varrho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\varrho}} H_{\nu+1/2}(\varrho),$$

zu den Funktionen

$$\eta_\nu = \sqrt{\frac{\pi\varrho}{2}} H_{\nu+1/2}(\varrho),$$

wie in Gl. (7). Dann wird

$$N = \frac{1}{k} \left[ \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \Phi' - \Phi \frac{\partial}{\partial \nu} (\Phi')}{-(2\nu+1)} \right]_a^\infty.$$

Die Differentialgleichung dieser Funktion ist wie in (9)

$$\Phi'' + \left(1 - \frac{\nu(\nu+1)}{\varrho^2}\right) \Phi = 0.$$

Um die Rechnung zu vereinfachen, vernachlässigen wir den kleinen Beitrag, den die Ionosphäre zu dem Normalisierungsintegral liefert, d.h. wir integrieren nur von  $r = a$  bis  $r = b$  statt bis  $r = \infty$ , d.h. nur innerhalb der Luftschicht. Entwickeln wir auch hier wieder die Funktion  $\Phi$

$$\Phi(\varrho_b) = \Phi(\varrho_a) + \Phi'(\varrho_a) \Delta\varrho + \Phi''(\varrho_a) \cdot \frac{\Delta\varrho^2}{2} + \Phi'''(\varrho_a) \cdot \frac{\Delta\varrho^3}{6},$$

$$\Phi'(\varrho_b) = \Phi'(\varrho_a) + \Phi''(\varrho_a) \cdot \Delta\varrho + \Phi'''(\varrho_a) \cdot \frac{\Delta\varrho^2}{2},$$

$$\frac{d\Phi''}{d\nu} = \frac{2\nu+1}{\varrho^2} \Phi - \left(1 - \frac{\nu(\nu+1)}{\varrho^2}\right) \frac{\partial\Phi}{\partial\nu},$$

$$\Phi''' = -2 \frac{\nu(\nu+1)}{\varrho^3} \Phi - \left(1 - \frac{\nu(\nu+1)}{\varrho^2}\right) \Phi',$$

und

$$\frac{\partial\Phi'''}{\partial\nu} = -\frac{2}{\varrho^3} (2\nu+1) \Phi - \frac{2\nu(\nu+1)}{\varrho^3} \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} + \frac{2\nu+1}{\varrho^2} \Phi' - \left(1 - \frac{\nu(\nu+1)}{\varrho^2}\right) \frac{\partial\Phi'}{\partial\nu}.$$

und setzen

$$\left(1 - \frac{\nu(\nu+1)}{\varrho_a^2}\right).$$

als sehr klein voraus, d.h. wir setzen

$$\Phi_a'' = 0, \quad \frac{\partial\Phi_a''}{\partial\nu} = \frac{2\nu+1}{\varrho_a^2} \Phi_a, \quad \Phi_a''' = -2 \frac{\nu(\nu+1)}{\varrho_a^3} \Phi_a,$$

$$\frac{\partial\Phi_a'''}{\partial\nu} = -\frac{2}{\varrho_a^3} (2\nu+1) \Phi_a - \frac{2\nu(\nu+1)}{\varrho_a^3} \frac{\partial\Phi_a}{\partial\nu} + \frac{2\nu+1}{\varrho_a^2} \Phi_a',$$

und setzen schließlich  $\Phi_a' = 0$  wegen der Grenzbedingung  $\partial\Pi/\partial r = 0$  an der Erdoberfläche,  $r = a$ , so erhalten wir

$$N = \frac{1}{k\varrho_a^2} \Phi_a^2 \Delta\varrho \left(1 + \frac{\Delta\varrho}{\varrho}\right).$$

Mit diesem Wert von  $N$  bestimmen wir nun den Potentialausdruck der Gl. (19)

$$\int_a^\infty \Pi(r, \theta) \psi_v(kr) dr = D_v \int_a^\infty \psi_v^2(kr) dr \cdot P_v(-\cos \theta) = D_v N_v P_v(-\cos \theta).$$

(<sup>5</sup>) Um schließlich die Anpassung unseres Potentialausdrucks an die Singularität des Dipols bei  $\theta = 0$ ,  $r = r_0$  nach Gl. (4)

$$\Pi_0 = \frac{Jl}{4\pi r_0 \omega \sqrt{\varepsilon}} \frac{\exp[-jkR]}{R}.$$

vorzunehmen, setzen wir in unmittelbarer Nähe von  $R \rightarrow 0$ , wo  $\Pi$  in  $\Pi_0$  übergehen muß

$$\begin{aligned} D_v N_v &= \frac{1}{P_v(-\cos \theta)} \int_a^\infty \Pi(r, \theta) \psi_v(kr) dr = \\ &= \frac{Jl}{4\pi r_0 \omega \sqrt{\varepsilon}} \frac{1}{P_v(-\cos \theta)} \int_a^\infty \frac{\exp[-jkR]}{R} \psi_v(kr) dr, \end{aligned}$$

$$\theta \rightarrow 0, \quad R \rightarrow 0, \quad r \rightarrow r_0,$$

$$R^2 = r^2 = r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta, \quad r_0 \text{ radiale Koordinate des Dipols.}$$

Mit

$$r = r_0(1 + \eta), \quad dr = r_0 d\eta, \quad \psi_v(kr) \rightarrow \psi_v(kr_0),$$

$$R = r_0 \sqrt{\eta^2 + \theta^2}, \quad \exp[-jkR] \rightarrow 1,$$

ergibt sich, indem man den Integrationsbereich auf die sehr kleinen Intervalle von  $r_0(1 - \eta)$  bis  $r_0(1 + \eta)$  beschränkt, mit Hilfe von Gl. (7a):

$$D_v N_v = \frac{Jl}{4\pi r_0 \omega \sqrt{\varepsilon}} \psi_v(k, r_0) \frac{\pi}{\sin \nu\pi}.$$

mit  $r_0 = a$ , wenn der Sender auf der Erdoberfläche steht. Es ergibt sich

(<sup>5</sup>) Genaueres s. A. SOMMERFELD: *Partielle Differentialgleichungen* (Leipzig, 1947). S. 218.



schließlich das Hertz'sche Potential auf der Erdoberfläche für  $r_0 = a$

$$\Pi_a = D_r \psi_r(k_1 a) P(-\cos \theta) = \frac{Jl}{4a\omega\sqrt{\varepsilon}} \frac{\psi_r^2(k_1 a)}{N_r} \frac{1}{\sin \nu\pi} P(-\cos \theta),$$

und da

$$\psi_r(k_1 a) = \frac{\Phi_r(k_1 a)}{k_1 a},$$

$$\Pi_a = \frac{Jl}{4a\omega\sqrt{\varepsilon}} \frac{1}{H \left(1 + \frac{\Delta \varrho}{\varrho}\right)} \frac{1}{\sin \nu\pi} P(-\cos \theta).$$

Nun ist

$$\sin \nu\pi = \frac{1}{2j} (\exp[j\nu\pi] - \exp[-j\nu\pi]) \approx -\frac{j}{2} \exp[j\nu\pi],$$

wenn  $\nu$  einen negativ imaginären Teil hat. Daher ist mit Gl. 18

$$\frac{P_r(-\cos \theta)}{\sin \nu\pi} \approx -\sqrt{\frac{2}{j\pi\nu}} \frac{1}{\sin \theta} \exp[-j(\nu + 1/2)\theta],$$

und damit wird

$$\Pi_a = -\frac{Jl}{4a\omega\sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{1}{H} \sqrt{\frac{2}{j\pi\nu}} \frac{1}{\sin \theta} \exp[-j(\nu + 1/2)\theta],$$

und mit  $\nu \approx k_1$  und  $a \sin \theta = D$ ,  $D$  Entfernung am Erdumfang gemessen,

$$\Pi_a = -\frac{Jl}{4a\omega\sqrt{\varepsilon}} \frac{1}{H} \sqrt{\frac{2c}{\pi j\omega D}} \cdot \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} \exp[-j(\nu + 1/2)\theta].$$

Die radiale Feldstärke auf der Erdoberfläche ist nach Gl. (1)

$$E_r = \frac{j}{a\sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} \right),$$

und nach der Differentialgleichung der Kugelfunktionen ist dies

$$E_r = -\frac{j}{a\sqrt{\varepsilon}} r(r-1)\Pi_a, \quad r \approx k_1 a,$$

so daß

$$E_r = \frac{Jl}{4} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{H} \sqrt{j\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi c D}} \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} \cdot \exp[-j(\nu + 1/2)\theta].$$

Wenn  $l = 2h$  gesetzt wird,  $h$  Antennenhöhe oberhalb der Erde und

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 120\pi, \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s},$$

wird

$$(24) \quad E_{r_{\text{V/m}}} = 6 \cdot 10^{-3} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} J \cdot h \frac{1}{H\sqrt{D}} \sqrt{j\omega} \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} \exp[-j(\nu + 1/2)\theta],$$

und wenn alle Längen in km gemessen werden

$$(25) \quad E_{r_{\text{mV/m}}} = 0,2 \sqrt{\frac{3\pi}{5}} J \frac{h}{H} \frac{\sqrt{j\omega}}{\sqrt{D}} \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} \cdot \exp[-j(\nu + 1/2)\theta],$$

( $h, H$  und  $D$  in km),

wobei nach Gl. 16

$$\exp[-j(\nu + 1/2)\theta] = \exp\left[-j\omega \frac{D}{c} - \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{j\omega}{\mu\kappa}} \cdot \frac{D}{H}\right].$$

Wünscht man die Feldstärke abhängig von der Strahlungsleistung eines Dipols über unendlich gut leitender Erde, so ist diese

$$N_w = 160\pi^2 \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 J_{\text{eff}}^2 = 40 \frac{\omega}{c^2} h^2 \cdot J_{\text{eff}}^2.$$

Dies gibt mit Gl. 24

$$(26) \quad E_{r_{\text{eff}}} = 18 \cdot 10^6 \sqrt{\frac{\pi}{6}} \sqrt{N_{\text{kw}}} \frac{1}{H\sqrt{D}} \frac{1}{\sqrt{\omega}} \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} \exp\left[-\frac{1}{2Hc} \sqrt{\frac{\omega}{2\mu\kappa}} \cdot D\right] \text{ V/m},$$

und wenn  $H$  und  $D$  in km gemessen werden

$$(27) \quad E_{r_{\text{eff}}} = 900 \sqrt{\frac{\pi}{15}} \sqrt{N_{\text{kw}}} \frac{1}{H_{\text{km}}\sqrt{D_{\text{km}}}} \frac{1}{\sqrt{\omega}} \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} \exp\left[-\frac{1}{2c} \sqrt{\frac{\omega}{2\mu\kappa}} \cdot \frac{D}{H}\right] \text{ V/m},$$

oder in Wellenlängen  $\lambda$  ausgedrückt

$$(28) \quad E_{\text{eff}} = 300 \sqrt{N_{\text{kw}}} \frac{1}{H_{\text{km}}} \sqrt{\frac{\lambda_{\text{km}}}{D_{\text{km}}}} \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} \exp \left[ - \frac{1}{400 \cdot \sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{\kappa \lambda}} \cdot \frac{D}{H} \right] \text{ mV/m,}$$

( $\kappa$  in  $1/\Omega\text{m}$ ,  $\lambda$  in km).

(s. a. W. O. SCHUMANN: *Zeits. f. ang. Phys.*, Bd. 4, Heft 12 (1952) wo diese Formel auf anderem Wege abgeleitet ist).

## 2. – Discussion der Formeln und Ausbreitung einer Blitzentladung.

a) *Frequenzabhängigkeit.* – Vergleicht man die Ausbreitungsformeln Gl. (27) und (28) mit schon bekannten Formeln, so ist besonders für diese sehr langen Wellen charakteristisch das Auftreten der Frequenz bzw. der Wellenlänge nicht nur im Dämpfungsfaktor, sondern auch im Amplitudenfaktor. Es bedeutet dies eine wesentliche Verbesserung des Empfangs mit wachsender Wellenlänge bei gegebener Strahlungsleistung. Der Grund scheint darin zu liegen, daß bei diesen großen Wellen auch schon des Nahfeld der Antenne durch die Ionosphäre so beeinflusst wird, daß die abgestrahlte Energie mit zunehmender Wellenlänge wächst. Vergleicht man diese Ausbreitungsformel mit den Formeln von AUSTIN<sup>(6)</sup>, von ESPENSCHIED, ANDERSON und BAILEY<sup>(7)</sup>, und von ZINKE<sup>(8)</sup>, so ergibt sich mit  $\kappa = 10^{-4}$  S/m,  $H = 70$  km,  $D = 10\,000$  km,  $\theta = \pi/2$  nach der neuen Formel mit

$$E_{\text{eff}} = 4,3 \sqrt{\frac{\lambda}{D}} \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} \sqrt{N_H} \exp \left[ - 0,0021 \frac{D}{\sqrt{\lambda}} \right] \text{ mV/m,}$$

für

$$\lambda = 30 \qquad 300 \qquad 3\,000 \qquad 30\,000 \text{ km}$$

$$\frac{E_{\text{eff}}}{\sqrt{N_H}} = 6,73 \cdot 10^{-3} \qquad 0,284 \qquad 2,14 \qquad 8,23 \text{ mV/m.}$$

Nach AUSTIN

$$E_{\text{eff}} = \frac{300}{D_{\text{km}}} \sqrt{N_{\text{kw}}} \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} \exp \left[ - \frac{0,0014}{\lambda_{\text{km}}^{0,6}} D \right] \text{ km.}$$

$$\frac{E}{\sqrt{N}} = 6,25 \cdot 10^{-3} \qquad 0,0239 \text{ mV/m.}$$

<sup>(6)</sup> L. W. AUSTIN: *Proc. Inst. Rad. Engineers.* 20, 689 (1932).

<sup>(7)</sup> L. ESPENSCHIED, C. N. ANDERSON und A. BAILEY: *Proc. Inst. Rad. Eng.*, 14, 7 (1926).

<sup>(8)</sup> O. ZINKE: *Frequenz*, 1, 16 (1947).

Nach ESPENSCHIED, ANDERSON und BAILEY,

$$E = \frac{300}{D} \sqrt{N} \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} \exp [-0,005 D / \lambda^{1,25}],$$

$$\frac{E}{\sqrt{N}} = 0,0185, \quad 0,0357 \text{ mV/m.}$$

$$\lambda = 30 \quad 300 \text{ km}$$

Nach ZINKE

$$E = \frac{15}{\sqrt{D}} \sqrt{N} \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} \exp [-0,003 D / \lambda], \quad 15 = 60 \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{H}},$$

$$\frac{E}{\sqrt{N}} = 0,69 \quad 1,17 \quad 1,89 \quad 1,89 \text{ mV/m.}$$

$$\lambda = 30 \quad 300 \quad 3000 \quad 30000 \text{ km}$$

Die Übereinstimmung der neuen Formel ist am besten für  $\lambda = 30$  km mit der Austin'schen Formel. Die Zink'sche Formel gibt für  $\lambda = 30$  km viel größere Werte, stimmt aber mit der neuen Formel für  $\lambda = 1000$ - $2000$  km etwa überein. Es ist zu berücksichtigen, daß Austins Formel für Wellenlängen  $\lambda = 300$ - $25000$  m aufgestellt ist, die Espenschiedformel für  $\lambda = 5250$ - $17500$  m, während die neue Formel etwa von  $\lambda = 30$  km an gilt. Die Zink'sche Formel ist für  $\lambda = 2$ - $20$  km gedacht. Das wesentliche der neuen Formel ist die Steigerung der Empfangsfeldstärke um mehr als das 1000 fache, wenn die Wellenlänge von 30 km auf 30000 km steigt, bei gleicher Strahlungsleistung der Antenne. Übereinstimmend mit ZINKE ist, daß die Entfernung  $D$  nur mit  $1/\sqrt{D}$  in die Formel eingeht, in Gegensatz zu AUSTIN und ESPENSCHIED, wo  $1/D$  auftritt. Dagegen tritt in der Zink'schen Formel die Höhe der Luftschicht  $H$  mit  $1/\sqrt{H}$  auf, während sie in der neuen Formel mit  $1/H$  erscheint. Die Abhängigkeit des Dämpfungsfaktors von der Frequenz ist sehr stark durch den Zustand der Ionosphäre bedingt. Da wir der Ionosphäre einen konstanten Leitwert zuschreiben, tritt, wie üblich, in solchen Fällen  $1/\sqrt{\lambda}$  im Dämpfungsfaktor auf. Das setzt voraus, daß die Schwingungsfrequenz  $\omega$  sehr klein gegen die Stoßfrequenz der Elektronen im Plasma ist, die ihrerseits dem Druck proportional ist, also mit wachsender Höhe  $H$  abnimmt. ZINKE nimmt im Gebiet zwischen  $\lambda = 2$  und  $20$  km bei  $\lambda = 6$  km die Stoßfrequenz gleich der aufgeprägten Frequenz an und gelangt dadurch zu einem Faktor  $1/\lambda$  im Dämpfungsfaktor. Während bei Wellenlängen größer als  $20$  km auch bei ihm ein frequenzunabhängiger Leitwert zustande kommt, d.h. dort auch  $1/\sqrt{\lambda}$  im Dämpfungsfaktor auftritt. Ver-



gleichen mit den exakten Berechnungen BREMMERS <sup>(9)</sup> auf S. 229, Fig. 65, seines Buches mit  $\kappa = 4 \cdot 10^{-4}$  S/m,  $H = 100$  km,  $\lambda = 10$  km,  $D = 10\,000$  km, ergibt sich nach der neuen Formel die Feldstärke von  $12,2 \mu\text{V/m}$  gegen das dort bestimmte  $2,5 \mu\text{V/m}$ . In diesem Bereich ist die Formel offenbar nicht mehr brauchbar, da  $\lambda/H = 1/10$  ist, während der Gültigkeitsbereich der Formel bis etwa  $\lambda/H = 1/2$  geht.

Anders sind die Frequenzabhängigkeiten, wenn der Strom des Dipols gegeben ist, Gl. 25. Dann ist die radiale Feldstärke

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_r = 0,12\pi \frac{J_A h_{\text{km}}}{H_{\text{km}}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\text{km}} D_{\text{km}}}} \cdot \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} \cdot \exp \left[ -\frac{D}{H} \frac{1}{400\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\text{km}} \kappa_{\text{S/m}}}} \right] \text{ mV/m} \\ \text{bzw.} \\ E_r = 0,2 \left\{ \frac{\sqrt{3\pi}}{5} \frac{\sqrt{\omega}}{H_{\text{km}} D_{\text{km}}} \cdot J_A \cdot h_{\text{km}} \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} \exp \left[ -\frac{D_{\text{km}}}{2H_{\text{km}}} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\kappa}} \sqrt{\frac{\omega}{2}} \right], \right. \\ \left. \text{bzw.} \right. \exp \left[ -\frac{10^{-5}}{12} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \sqrt{\frac{\omega}{\lambda}} \frac{D_{\text{km}}}{H_{\text{km}}} \right]. \end{array} \right.$$

Es ergibt sich hieraus für jede Entfernung  $D$  eine günstigste Frequenz  $\omega_{\text{opt}}$  bzw. eine günstigste Wellenlänge  $\lambda_{\text{opt}}$  für maximales  $E_r$ ,

$$\lambda_{\text{opt}} = \frac{D^2}{H^2} \cdot \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{1}{48 \cdot 10^4},$$

die proportional mit dem Quadrat der Distanz wächst.

So ergibt sich z.B. mit  $D = mH$ ,  $H = 70$  km, und  $\kappa = 10^{-4}$  S/m,

$m$	10	30	40	50	100
$D$	700	2 100	2 800	3 500	7 000 km
$\lambda_{\text{opt}}$	2	18	32	50	200 km
$f_{\text{opt}}$	150 000	16 700	9 400	6 000	1 500 Hz

Für andere Frequenzen gilt

$$\frac{E_r}{E_{r_{\text{max}}}} = e \cdot \sqrt{\frac{\omega}{\omega_{\text{opt}}}} \exp \left[ -\sqrt{\frac{\omega}{\omega_{\text{opt}}}} \right], \quad \text{mit} \quad \omega_{\text{opt}} = \frac{8H^2}{D^2} \cdot \frac{\kappa}{\varepsilon},$$

<sup>(9)</sup> H. BREMMER: *Terrestrial Radio Waves* (Elsevier, 1949).

und man erhält für gegebenen konstanten Antennenstrom für verschiedene Frequenzen ein Spektrum nach Fig. 1.

Das Spektrum fällt für  $\omega/\omega_{\text{opt}} \ll 1$  rasch auf Null nach Formel  $E_r/E_{r_{\text{max}}} = e\sqrt{\omega/\omega_{\text{opt}}}$  und erstreckt sich sehr weit ins hochfrequente Gebiet. Je größer die Distanz  $D$  ist, um so mehr spielen die langen Wellen eine maßgebende Rolle im Spektrum. Besteht das Stromsignal aus verschiedenen Frequenzen, so wird bei kleineren Distanzen  $D$ , wo die optimale Frequenz  $\omega_{\text{opt}}$  ziemlich hoch liegt, das Gebiet der niederen Frequenzen, der langen Wellen, stark benachteiligt sein. Umgekehrt ist es bei größeren Distanzen, wo die optimale Frequenz ziemlich tief liegt, und wo

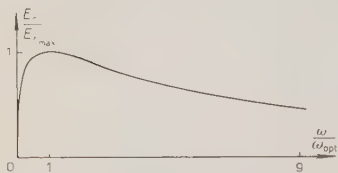


Fig. 1. – Ausbreitungsspektrum des Antennenstromes.

die niederen Frequenzen dominieren und die hohen relativ schwach vertreten sind.

### “Blitzspektrum”

#### und Form des ausgesendeten Signals (Atmospherics).

Die Zeichen, die eine Blitzentladung aussendet, hängen erstens von dem zeitlichen Verlauf der Blitzentladung ab und zweitens von der Verformung, die das Zeichen während seiner Wanderung erleidet. Faßt man den Blitz als einen erzwungenen Stromverlauf auf, so ist die spektrale Verteilung der Verformung durch Gl. (24) und (25) nämlich  $\sqrt{p} \exp[-\alpha^{1/2} p^{1/2}]$ ,  $p = j\omega$ , gegeben (wenigstens für die Frequenzen für die diese Gl. gilt). Es sollen nun einige einfache zeitliche Formen in Bezug auf ihren zeitlichen Verlauf besprochen werden.

#### 1. – Dirac Impuls des Stromes.

Setzt man eine Blitzentladung als einen kurz dauernden rechteckigen Stromimpuls von Strom  $J$  und der kurzen Dauer  $\tau$ , vom Moment  $J\tau$  voraus, in der Grenze als einen Dirac-Impuls von diesem Moment, so hat sein Spektrum die Größe  $J\tau$  für alle Frequenzen. Nach Durchlaufen einer Entfernung von  $D = 10\,000$  km tritt das Maximum von  $E_r$  für eine Frequenz von  $f_{\text{opt}} = 705$  Hz,  $\lambda_{\text{opt}} = 425$  km auf.

Nimmt man eine Höhe der Blitzentladung  $h = 5\,000$  m an,  $J_A = 5 \cdot 10^4$  A

$\tau = 10^{-4}$  s, so folgt aus Gl. (29)  $E_{r_{\max}} = 0,150$  mV/m für  $\lambda$  opt. Für  $f/f_{\text{opt}} = 1/100$ ,  $f = 7,05$  Hz ist  $E = 0,25 E_{r_{\max}}$ , für  $f/f_{\text{opt}} = 100$ ,  $f = 70500$  Hz ist dagegen  $E_r$  schon auf  $1,24 \cdot 10^{-3} E_{r_{\max}}$  gefallen.

Um den zeitlichen Verlauf des Impulses nach Durchlaufen der Strecke  $D$  zu finden, gehen wir von der spektralen Verteilung nach Gl. (24) und (25) aus, die sich mit  $p = j\omega$  in der Form

$$(30) \quad E_r = C \cdot \sqrt{p} \exp \left[ -p \frac{D}{c} - \frac{D}{2H} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\kappa}} \sqrt{p} \right],$$

darstellt. Das Fourierintegral über die Frequenz<sup>(10)</sup> ergibt den zeitlichen Verlauf:

$$(31) \quad E_r = C \frac{1}{\alpha^{3/2}} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{2x} - 1 \right) \frac{1}{x^{3/2}} \exp \left( -\frac{1}{4x} \right), \quad x = \frac{t}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{D^2}{4H^2} \cdot \frac{\varepsilon}{\kappa},$$

wobei die Zeit vom Beginn des Eintreffens des Signals an gerechnet ist. Fig. 2 zeigt den Wert von  $(E_r/c) \cdot \alpha^{3/2}$ .

Aus der Figur sieht man, daß der Höchstwert des Signals mit  $1/D^2$  abnimmt, und daß es sich proportional zu  $D^2$  verbreitert. Bemerkenswert ist, daß es bei

$$t = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \frac{D^2}{4H^2} \cdot \frac{\varepsilon}{\kappa},$$

durch Null geht, und daß dann eine niedrige negative Halbwelle folgt, die sehr langsam mit der Zeit  $t$  verschwindet. Besteht der Blitz aus mehreren aufeinanderfolgenden Dirac-Impulsen, so erhält man für jeden solchen Impuls ein Bild nach Art der Fig. 2. Diese Bilder sind entsprechend zeitlich relativ zueinander zu verschieben und dann zu überlagern.

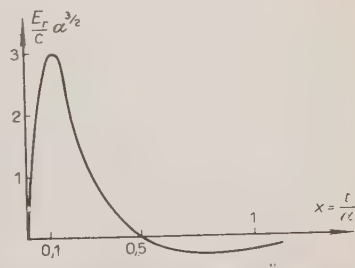


Fig. 2. - Dirac-Impuls des Stromes.

### 3. - Rechteckiger Impuls endlicher Länge und konstanter Höhe.

Dieser Verlauf läßt sich darstellen durch die Überlagerung zweier « unit steps » Einheitsstufen-Funktionen, entgegengesetzten Vorzeichens (Fig. 3), von

<sup>(10)</sup> G. A. CAMPBELL und R. M. FOSTER: *Fourier Integrals for Practical Applications*. Bell. Tel. System Monograph B 584 (New York, 1931), S. 93, No. 806, wo alle Regeln u. Integrale angegeben sind.

denen die eine zur Zeit  $t = 0$  den Strom von 0 auf den Wert  $J$  springen läßt, und die zweite nach der Zeit  $T$  den Rücksprung auf den Strom Null durchführt. Die «unit step» Funktion hat das Spektrum  $1/p$ . Dies gibt multipliziert mit dem Spektrum die Verteilungsfunktion

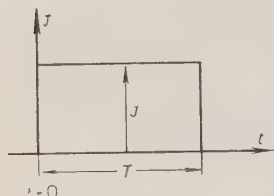


Fig. 3. — Rechteckimpuls des Stromes.

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \exp [-\alpha^{1/2} \cdot p^{1/2}], \quad \alpha = \frac{D^2}{4H^2} \cdot \frac{\varepsilon}{\kappa}.$$

Mit

$$\varepsilon = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{ F'm} \quad \text{und} \quad \kappa = 10^{-1} \text{ S'm}.$$

ist

$$\alpha = \frac{D^2}{H^2} \cdot \frac{1}{4,52 \cdot 10^7},$$

also

$$\text{für } H = 70 \quad \text{km}$$

$$D = H \quad \alpha = \frac{1}{4,5} \cdot 10^{-7} \text{ s}, \quad \left| \quad D = 70 \quad \text{km} \right.$$

$$D = 10H \quad = \frac{1}{4,5} \cdot 10^{-5} \text{ s}, \quad \left| \quad D = 700 \quad \text{km} \right.$$

$$D = 100H \quad = \frac{1}{4,5} \cdot 10^{-3} \text{ s} \quad \left| \quad D = 7000 \text{ km} . \right.$$

Aus der Spektralfunktion folgt mit dem Fourierintegral der zeitliche Verlauf

$$y = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp [-\alpha/4t].$$

Das Maximum

$$y_m = \frac{1}{\sqrt{\pi \alpha} \sqrt{e}} \quad \text{wird für} \quad t = \tau = \frac{\alpha}{2},$$

erreicht und es ist

$$\frac{y}{y_m} = \sqrt{\frac{\tau}{t}} \sqrt{e} \exp [-\tau/2t].$$



Den Verlauf der Kurve zeigt Fig. 4.

$$\frac{t}{\tau} = 10, \quad \frac{y}{y_m} = 0,52 \quad \frac{t}{\tau} = 100, \quad \frac{y}{y_m} = 0,165.$$

Wenn nach der Zeit  $T$  eine zweite Stufenfunktion gleicher Höhe und entgegengesetzten Vorzeichens einsetzt, so entsteht die Verteilung eines ursprünglich rechteckigen Impulses von der Breite  $T$ . Fig. 5 gibt eine Skizze des Verlaufs für den Fall  $T = \tau/2, 4\tau$  und  $10\tau$ .

Da  $\tau = \alpha/2$  quadratisch mit dem Abstand zunimmt, verschiebt sich das Bild der Fig. 5 von großen  $T/\tau$  zu immer kleineren  $T/\tau$  während seiner Wanderung.

Für kleine  $T$  sieht man den Übergang zum Dirac-Impuls, Fig. 2. Für eine Reihe aufeinanderfolgender Rechteckimpulse erhält man durch Überlagerung mehrerer Bilder nach Fig. 5 die zeitliche Verteilung.

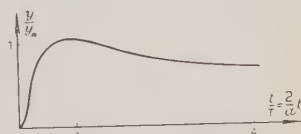


Fig. 4. - Stufenimpuls des Stromes.

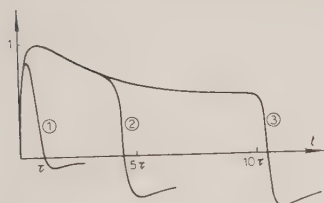


Fig. 5. - Rechteckiger Stromimpuls.

- 1:  $T = 0,5 \tau$
- 2:  $T = 4 \tau$
- 3:  $T = 10 \tau$

#### 4. - Exponentiell abklingender Impuls.

Verläuft der Strom nach einer plötzlich bei  $t = 0$  einsetzenden abklingenden Exponentialfunktion  $\exp[-\beta t]$ ,  $t > 0$ , so ist seine spektrale Verteilung durch  $1/(p + \beta)$  gegeben und die spektrale Verteilung des Signals durch

$$\frac{p^{1/2} \exp[-\alpha^{1/2} \cdot p^{1/2}]}{p + \beta}.$$

Die zugehörige Zeitfunktion ist (CAMPBELL und FOSTER, l. c., S. 40, No. 249)

$$\exp[-\beta t] \int_0^t \exp[\beta t'] G(t') dt',$$

mit

$$G(t) = \left(\frac{\alpha}{2t} - 1\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi} t^{3/2}} \exp[-\alpha/4t],$$

(wie in Gl. (31) S. 1131 Funktion des Dirac Impulses Fig. 2). Für sehr kleine

Zeiten  $\beta t \ll 1$  verläuft sie wie die Funktion der »unit step« Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp[-\alpha/4t],$$

um aber mit wachsender Zeit rascher abzuklingen, durch Null zu gehen, und mit einer negativen Halbwelle zu enden. Für sehr kleine  $\beta$  nähert sie sich der Form der Einheitsstufenfunktion (Fig. 4, S. 1133), für große  $\beta$  mehr der Form  $G(t)$  des Dirac-Impulses. Der Nulldurchgang liegt bei sehr großen  $\beta$  nahe bei  $\tau = \alpha/2$ . Mit abnehmenden  $\beta$ , langsamerem Abklingen wächst  $\tau$  an, bis bei  $\beta \rightarrow 0$ ,  $\tau \rightarrow \infty$  geht. Es ist also immer eine auf dem positiven Anfangsteil folgende, negative langsam abklingende Halbwelle vorhanden.

### 5. - Ladungs- bzw. Nahfeldimpulse.

Anders wird das Bild der Signale, wenn man sich bestimmte Ladungsverläufe, bzw. Feldverläufe im Nahfeld des Dipols als gegeben denkt. Da Strom und Ladung nach der Gl.

$$i = -dq/dt = -j\omega q = -pq,$$

zusammenhängen, wird jetzt die Verteilungsfunktion für die Feldstärke  $E_r$  nach Gl. (30) S 1131

$$p^{3/2} \exp[-\alpha^{1/2} p^{1/2}].$$

Verglichen mit der früheren Verteilungsfunktion  $\sqrt{p} \exp[-\sqrt{\alpha} \sqrt{p}]$ , die das Spektrum Fig. 1 gab, ist die spektrale Verteilung jetzt  $e^3(\omega/\omega_{\text{opt}})^{3/2} \cdot \exp[-3\sqrt{\omega/\omega_{\text{opt}}}]$  wobei  $\omega_{\text{opt}} = 9(2/\alpha)$  ist, also 9 mal größer wie in Fig. 1. Außerdem fällt die Intensität der Frequenzen für  $\omega < \omega_{\text{opt}}$  jetzt viel rascher ab, als in Fig. 1. Ausgedrückt durch  $z = \sqrt{\alpha}\omega/2$ , erhält man im ersten Fall  $y/y_m = e \cdot z \cdot \exp[-z]$  und im zweiten Fall  $e^3(z/3)^3 \exp[-z]$ , wobei im ersten Fall das Maximum bei  $z = 1$ , im zweiten Fall bei  $z = 3$  auftritt. Fig. 6 gibt eine vergleichende Skizze beider Verteilungen.

Da  $\alpha$  bei Entfernungen von  $D = 700\text{--}7000$  km von  $(1/4,5) \cdot (10^{-5} \text{ bis } 10^{-3}) \text{ s}$  geht, liegen die Frequenzen in diesem Bereich bei  $f \approx 1,44 \cdot (10^5 \text{ bis } 10^3) z^2 \text{ s}^{-1}$ , speziell für  $z = 1$  bei  $f = 1,44 \cdot (10^5 \text{ bis } 10^3) \text{ Hz}$ , bei  $z = 3$  bei  $f = 1,3 \cdot (10^3 \cdot 10^4) \text{ Hz}$ . Setzt man die gleichen zeitlichen Verläufe, wie bisher für den Strom angenommen, jetzt für die Ladungen (bzw. die Nahfeldstärken des Blitzes) an, so sind die entsprechenden spektralen Verteilungen mit  $p$  zu multiplizieren. Nach

den Regeln der Fourierintegration (bzw. der Laplace-Transformation) heißt das, daß die neuen zeitlichen Verläufe als Differentialquotienten nach der Zeit der bisherigen Verläufe gewonnen werden.

## 6. – Dirac-Einheitsimpuls der Ladung.

(Entsprechend einer kurz dauernden positiven und einer unmittelbar darauf folgenden kurzen negativen Halbwelle des Stromes). Der zeitliche Verlauf des Signals ist jetzt nach dem Spektrum

$$p^{3/2} \exp[-\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{p}],$$

durch

$$y = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\alpha^3} \frac{1}{8\alpha^{9/2}} \exp[-1/4x].$$

$$\cdot [1 - 12x + 12x^2], \quad x = \frac{t}{\alpha}$$

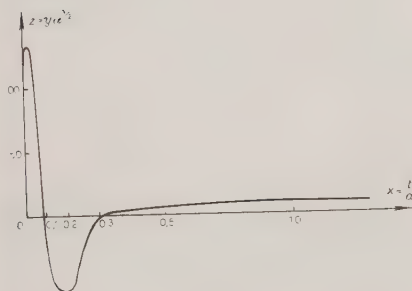


Fig. 7. – Dirac-Impuls der Ladung.

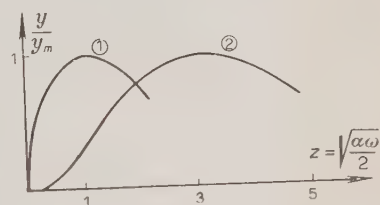


Fig. 6. – Ausbreitungsspektrum des Antennenstromes (1), der Antennenladung (2).

$$1.) \quad y_3 y_m = e z \exp[-z]$$

$$2.) \quad y_3 y_m = e^3 \left[ \frac{z}{3} \right]^3 \exp(j-z).$$

gegeben.

Die Kurve geht zweimal durch Null für  $x = (1/2) \pm \sqrt{1/6} = 0,093$  und  $0,305$  entsprechend Fig. 6, und hat 2 Maxima und ein Minimum. Fig. 7 stellt schematisch den Verlauf von  $z = y\alpha^{3/2}$  dar.

## 7. – Rechteckiger Ladungsimpuls endlicher Länge mit konstanter Höhe.

In diesem Fall erhalten wir für die Feldstärke mit der Einheitsstufenfunktion die spektrale Verteilung

$$\sqrt{p} \exp[-\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{p}],$$

wie beim Dirac-Impuls des Stromes, entsprechend Fig. 2, S. 1131. Geht der Impuls nach der Zeit  $T$  wieder sprunghaft auf Null zurück, so sind 2 Kurven nach Fig. 8 im zeitlichen Abstand  $T$  zu überlagern.

Da  $\alpha$  proportional  $D^2$  ist, nimmt  $T/\alpha$  mit wachsender Distanz ab, d.h. der Impuls geht allmählich von der Form 3 in 2 und dann 1 etc. über. Für sehr große Abstände nähert er sich der Form des Dirac Impulses. Der Rechteck-

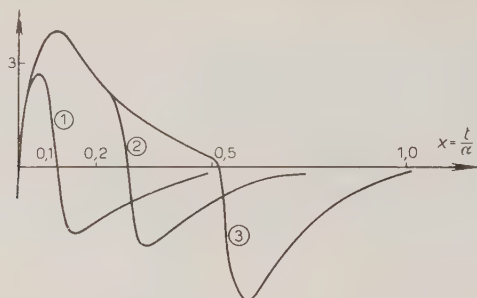


Fig. 8. — Rechteckiger Ladungsimpuls.

1:  $T = 0,05 \alpha$

2:  $T = 0,2 \alpha$

3:  $T = 0,5 \alpha$

impuls in der Ladung (bzw. im Nahfeld) entspricht 2 kurzen starken Stromstößen in zeitlichen Abstand  $T$  in entgegengesetzter Richtung.

## 8. — Exponentiell abklingender Ladungsimpuls.

Dieser Verlauf entspricht einem kurzen starken Stromstoß in einer Richtung und einer kleinen lang andauernden negativen Stromwelle, die allmählich verschwindet. Dieser Verlauf ist etwa aus einer Kurve abzuleiten, die NORINDER <sup>(11)</sup>, angibt. Der spektrale Verlauf ist jetzt

$$\frac{p^{3/2}}{p + \beta} \exp [ - \sqrt{x} \cdot \sqrt{p} ],$$

und dies gibt den zeitlichen Verlauf

$$y = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \exp [ - \beta t ] \int_0^t \exp [ \beta t ] G(t) dt \right]$$

<sup>(11)</sup> H. NORINDER: *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, **33a**, No. 16 (1946) Fig. 25, S. 35, und Consiglio Nazionale delle Ricerche: *Propagation of Atmospheres*, (1948), S. 168.



$$y = -\beta \exp[-\beta t] \int_0^t \exp[\beta t] G(t) dt + G(t)$$

$$G(t) = \left(\frac{\alpha}{2t} - 1\right) \frac{1}{2\sqrt{\pi} t^{3/2}} \exp[-\alpha/4t].$$

Die Funktion  $G(t)$  ist in Fig. 2 (S. 1131) dargestellt. Der Verlauf von  $y$  ist stark vom Dämpfungsfaktor  $\beta$  der Ladungsverteilung abhängig. Für sehr große  $\beta$  nähert sich der Verlauf dem Wert  $\partial G/\partial t$ , wie er in Fig. 7, S. 1135, dargestellt ist. Für sehr kleine  $\beta$  hingegen dem Wert  $G(t)$ , Fig. 2, S. 1131. Man hat im zeitlichen Verlauf bei kleinen  $\beta$  eine positive Welle, die durch Null geht bei  $t = \alpha/2$  und der dann eine schwache negative Welle folgt. Mit wachsender Dämpfung wird die positive Welle immer kürzer, die negative Welle wird größer und es tritt ein zweiter Nulldurchgang auf, dem dann schließlich eine lange, sehr geringe positive Welle folgt.

Ein Impuls, der bei  $t = 0$  allmählich beginnt und dann wieder abklingt, läßt sich immer durch die Differenz zweier Exponentialfunktionen mit verschiedenen Dämpfungen darstellen. Sein Spektrum wäre dann durch

$$\left(-\frac{1}{p + \beta_1} - \frac{1}{p + \beta_2}\right) \exp[-\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{p}],$$

wo  $\beta_2 > \beta_1$  ist, gegeben und sein zeitlicher Verlauf durch die Differenz der zeitlichen Verläufe, die den beiden Spektralfunktionen entsprechen. Eine genauere Diskussion scheint aber erst notwendig, wenn die Experimente genauere Unterlagen über Anstieg und Abklingen dieser Impulse geliefert haben. Eine lineare Änderung der Ladung (oder des Nahfeldes) von einem konstanten Wert zu einem anderen konstanten Wert ist nach der Gl.  $i = -dq/dt$  identisch mit einem rechteckigen Strompuls und bringt dadurch Zeichen nach Fig. 5 hervor.

Wir haben im vorhergehenden einige ganz einfache zeitliche Verläufe von Strom und Ladung, nämlich den Dirac-Impuls, den rechteckigen Impuls endlicher Breite und den exponentiell abklingenden Impuls diskutiert. Man sieht, wie verschieden in der Form die entstehenden ausgesendeten Signale sind und wie stark sie sich während ihrer Wanderung in ihrer Form ändern.

In der Hauptsache sieht man, daß Signale, die ursprünglich nur positive Ordinaten haben (unidirectional) im Lauf ihrer Wanderung auch negative Anteile in den ausgesendeten Signalen erzeugen. Da die grundlegende spektrale Funktion der Ausbreitung  $\sqrt{p} \exp[-\alpha^{1/2} \cdot p^{1/2}]$  zunächst nur für lange Wellen-

d.h. geringe Frequenzen gilt, und die geringen Frequenzen den zeitlichen Verlauf nur für größere Zeiten wesentlich bestimmen, dürften die angegebenen zeitlichen Verläufe für größere Zeiten richtig sein, während der Verlauf zu Beginn des Signals, für kleine  $t$ , zweifelhaft ist. Deswegen dürften die angegebenen zeitlichen Formen für große Wanderungstrecken  $D$  genauer stimmen als für kleine Entfernungen.

#### RIASSUNTO (\*)

Utilizzando il metodo delle autofunzioni singolari, si ricava una formula per la propagazione delle onde elettriche lunghe intorno alla Terra, tenendo conto della ionosfera. Con l'ausilio della formula ottenuta, si ricava, per mezzo di una integrazione di Fourier, la propagazione dei segnali elettromagnetici dovuti a una scarica a scintilla, ammettendo per il decorso temporale della scarica a scintilla alcune semplici dipendenze temporali, in linea di principio differenti fra di loro.

(\*) *Traduzione a cura della Redazione.*

## Application of second quantization methods to the classical statistical mechanics.

M. SCHÖNBERG

*Centre de Physique Nucléaire de l'Université Libre - Bruxelles*

(ricevuto il 6 Ottobre 1952)

**Summary.** — Methods similar to those of second quantization are applied to the Liouville equation of the classical statistical mechanics. An equation similar to the Schrödinger equation of a quantized field is given. It is shown that the interpretation rules of the quantal type of the field formalism lead to the rules of the classical statistical mechanics, the particles being treated as indistinguishable. The application of the Fock treatment of second quantization leads to the introduction of wave functions in phase space, the probability density of the classical statistical mechanics being the square of the absolute value of the wave function in phase space. The choice of the sign in the commutation rules of the field operators leads to symmetrical or anti-symmetrical wave functions in phase space. To each kind of symmetry corresponds a different statistics, Bose or Fermi, as in quantum theory. The Boltzmann statistics corresponds to phase space wave functions without symmetry conditions. The wave functionals for the states with zero particles of the fields in phase space are analogous to those of the quantized fields of quantum theory.

### 1. — Introduction.

The method of second quantization was first introduced by DIRAC in the quantum theory of systems of non interacting Bose particles and later extended by JORDAN and KLEIN<sup>(2)</sup> to the case of interacting Bose particles, and by

<sup>(1)</sup> P. A. M. DIRAC: *Proc. Roy. Soc.*, A **114**, 243 (1927).

<sup>(2)</sup> P. JORDAN and O. KLEIN: *Zeits. f. Phys.*, **45**, 751 (1927).

JORDAN <sup>(3)</sup> and JORDAN and WIGNER <sup>(4)</sup> to the case of systems of Fermi particles. The second quantization methods are essentially based on two properties of the wave equation of a system of similar particles:

a) The wave equation is linear and contains symmetrically the variables of the similar particles.

b) Only symmetrical (Bose particles) or anti-symmetrical solutions (Fermi particles) of the wave equation are required.

The Schrödinger equation for  $n$  particles of mass  $m$

$$(1) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{l=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_l} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{l \neq l'} \Phi(\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_{l'}) \right\} \Psi,$$

$\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  denoting the potential of the forces arising from the interaction between two particles (\*) is replaced by a Schrödinger equation for the wave functional  $\chi_a$

$$(2) \quad i\hbar \frac{\partial \chi_a}{\partial t} = \mathcal{H}_a \chi_a,$$

$$(3) \quad \mathcal{H}_a = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \psi^*(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^2 \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \iint \psi^*(\mathbf{x}) \psi^*(\mathbf{x}') \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{x}',$$

$\psi(\mathbf{x})$  and  $\psi^*(\mathbf{x})$  being operators defined by the commutation rules:

$$(4) \quad [\psi(\mathbf{x}), \psi^*(\mathbf{x}')]_{\pm} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') [\psi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x}')]_{\pm} = [\psi^*(\mathbf{x}), \psi^*(\mathbf{x}')]_{\pm} = 0.$$

The signs  $-$  and  $+$  correspond to the Bose and Fermi statistics, respectively, and

$$(5) \quad [A, B]_{\pm} = AB \pm BA.$$

The equation (2) for the wave functional  $\chi_a$  is actually more general than the equation (1), because it leads to (1) when the operator  $N_{op}^{(a)}$  for the number of particles

$$(6) \quad N_{op}^{(a)} = \int \psi^*(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

has a value  $n$  in the state of motion described by  $\chi_a$

$$(7) \quad N_{op}^{(a)} \chi_a = n \chi_a.$$

<sup>(3)</sup> P. JORDAN: *Zeits. f. Phys.*, **44**, 473 (1927).

<sup>(4)</sup> P. JORDAN and E. WIGNER: *Zeits. f. Phys.*, **47**, 631 (1928).

(\*)  $\Phi$  depends only on  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ .



But there are solutions of (2) which do not satisfy a condition of the type (7). Moreover, the nature of the statistics obeyed by the particles is already determined by equation (2) and the commutation rules (4), whereas in the case of (1) it must be imposed as an extra condition for the solution. Equation (2) describes the states of motion of a quantized field and the particles are the quanta of the field.

The commutation rules (4) do not involve the Planck constant  $\hbar$  and the procedure of second quantization can be applied to the Liouville equation of the classical statistical mechanics

$$(8) \quad \frac{\partial f_n}{\partial t} = (H_n, f_n)_n = \left( \sum_{l=1}^n \frac{\mathbf{p}_l^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{l \neq l'} \Phi(\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_{l'}), f_n \right)_n = -iL_n f_n,$$

$$(9) \quad (F, G)_n = \sum_{l=1}^n \left\{ \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_l} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}_l} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}_l} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{x}_l} \right\},$$

$\mathbf{p}_l$  denoting the momentum of the particle of position vector  $\mathbf{x}_l$  and  $f_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)$  being the probability density in the phase space of the  $n$  particle system. We shall prove in section 2 that an equation analogous to (2), and leading to (8), can be introduced:

$$(10) \quad i \frac{\partial \chi}{\partial t} = \mathcal{R} \chi,$$

$$(11) \quad \mathcal{R} = i \left[ \psi^*(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \psi(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \right)_1 d\mathbf{x} d\mathbf{p} + \right. \\ \left. + \frac{i}{2} \iint \psi^*(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \psi^*(\mathbf{x}', \mathbf{p}') (\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \psi(\mathbf{x}', \mathbf{p}') \psi(\mathbf{x}, \mathbf{p}))_2 d\mathbf{x} d\mathbf{p} d\mathbf{x}' d\mathbf{p}' \right].$$

The operators  $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  and  $\psi^*(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  are defined by commutation rules analogous to (4):

$$(12) \quad [\psi(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \psi^*(\mathbf{x}', \mathbf{p}')]_{\pm} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'),$$

$$(13) \quad [\psi(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \psi(\mathbf{x}', \mathbf{p}')]_{\pm} = [\psi^*(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \psi^*(\mathbf{x}', \mathbf{p}')]_{\pm} = 0.$$

The choice of the sign in the commutation rules (12)-(13) determines the statistics of the particles, which are here considered as indistinguishable. There is an operator  $N_{\text{op}}$  for the number of particles

$$(14) \quad N_{\text{op}} = \int \psi^*(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \psi(\mathbf{x}, \mathbf{p}) d\mathbf{x} d\mathbf{p},$$

having the eigenvalues 0, 1, 2, ... and equation (8) is a consequence of (10), when

$$(15) \quad N_{\text{op}} \chi = n \chi \quad (n = \text{positive integer}).$$

The possibility of introducing the Bose and Fermi statistics (\*) in a classical treatment is rather surprising, because the probability density  $f_n$  is always positive and must be taken as symmetrical in the variables of the  $n$  particles. As a matter of fact, we shall see that the theory based on the equation (10) leads to the introduction of a function  $\Theta_n$  such that

$$(16) \quad f_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) = |\Theta_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)|^2.$$

The Liouville equation (8) for  $f_n$  follows from that for  $\Theta_n$

$$(17) \quad \frac{\partial \Theta_n}{\partial t} = (H_n, \Theta_n)_n = -iL_n \Theta_n,$$

since the square of the absolute value of a solution of the Liouville equation is also a solution of the same equation.  $\Theta_n$  is symmetrical in the case of Bose particles and antisymmetrical in the case of Fermi particles. Thus we are led to a kind of wave function in classical statistical mechanics. Equation (17) may be considered as the classical wave equation, the hermitian operator  $L_n$  playing the part of classical hamiltonian operator.

In general, a condition of the type (15) is not satisfied by  $\chi(t)$  and the number of particles will not be determined, so that the solutions of (10) describe grand ensembles. We shall see that the average value  $\bar{N}$  of  $N_{\text{op}}$  in the state of motion described by  $\chi$ , and computed as in quantum mechanics, is constant (time independent)

$$(18) \quad \bar{N} = (\chi(t), N_{\text{op}} \chi(t)) = \int \chi^*(t) N_{\text{op}} \chi(t) d\mu,$$

the integration being performed with respect to the variables used to describe our special kind of «quantized» field in the phase space of a single particle.  $\chi$  must, of course, be normalized:

$$(19) \quad \int \chi^* \chi d\mu = 1.$$

The rules of physical interpretation of the formalism based on  $\chi$  are analogous to those of quantum theory, but they lead to the results given by classical statistical mechanics whenever the number of particles is determined. This fact shows that a statistical formalism of the classical type can be reduced to a statistical formalism of the quantum type. It is possible to introduce

(\*) There are of course several essential modifications introduced by the quantization.

an operator for any mechanical quantity. The operator for the energy is

$$(20) \quad \mathcal{H} = \int \psi^*(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{p}) d\mathbf{x} d\mathbf{p} + \\ - \frac{1}{2} \int \psi^*(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \psi^*(\mathbf{x}', \mathbf{p}') \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}', \mathbf{p}') \psi(\mathbf{x}, \mathbf{p}) d\mathbf{x} d\mathbf{p} d\mathbf{x}' d\mathbf{p}',$$

and does not coincide with the operator  $\mathcal{K}$  which appears in the equation of motion (10).

The passage from the field type of formalism to the ordinary description in phase space can be easily done by using the following expansion of  $\chi(t)$ :

$$(21) \quad \chi(t) = \Theta_0(t) \chi_0 + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \int \Theta_n(t; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) \chi_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_n d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_n.$$

The  $\chi_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{p}_1, \dots)$  are the functionals of a complete orthogonal system defined in section 5. Each term in the expansion (21) is an eigenfunctional of  $N_{op}$ , the eigenvalue being the corresponding value of  $n$ .  $\chi_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{p}_1, \dots)$  describes the  $n$ -particle state in which the particles are at the points  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i)$  in the phase space  $\Omega$  of a single particle. The expansion (21) is closely related to Fock's<sup>(5)</sup> method of second quantization, but it is more convenient to handle than the Fock sequences of functions.

$$|\Theta_n(t; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)|^2 d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_n d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_n,$$

gives the probability of finding only  $n$  particles and at the points  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i)$  of the phase space of a single particle  $\Omega$ . Equation (21) shows clearly how  $\chi(t)$  describes a non stationary grand ensemble.

As in quantum mechanics, we can introduce time dependent operators and a time independent wave functional by a contact transformation:

$$(22) \quad A(t) = \exp [i\mathcal{K}t] A \exp [-i\mathcal{K}t].$$

The time dependent density operators are particularly interesting:

$$(23) \quad \varrho_n(t; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) = \\ = \psi^*(t; \mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1) \psi^*(t; \mathbf{x}_2, \mathbf{p}_2) \dots \psi^*(t; \mathbf{x}_n, \mathbf{p}_n) \psi(t; \mathbf{x}_n, \mathbf{p}_n) \dots \psi(t; \mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1).$$

We shall prove in section 8 that

$$(24) \quad \frac{d}{dt} \varrho_n(t; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{p}_1, \dots) = ((H_n, \varrho_n(t; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{p}_1, \dots)))_n + \\ + \int \left( \sum_{i=1}^n \Phi(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{n+1}) \varrho_{n+1}(t; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n, \mathbf{p}_{n+1}) \right)_{n+1} d\mathbf{x}_{n+1} d\mathbf{p}_{n+1}.$$

<sup>(5)</sup> V. FOCK: *Zeits. f. Phys.*, **75**, 622 (1932).

These equations are a generalization of those used by YVON <sup>(6)</sup>, BORN and GREEN <sup>(7)</sup> and KIRKWOOD <sup>(8)</sup> in classical statistical mechanics. The latter equations can be obtained from (25) by taking the average values of both sides, as will be shown in section 8.

One of the most interesting elements of the present field formalism is the introduction of a kind of vacuum analogous to those of quantum field theories. The vacuum is described by a wave functional  $\chi_0$  defined by the condition

$$(25) \quad \int_{\omega} \psi^*(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \psi(\mathbf{x}, \mathbf{p}) d\mathbf{x} d\mathbf{p} \chi_0 = 0,$$

$\omega$  being any volume of the phase space of a single particle. By introducing suitable variables,  $\chi_0$  becomes the product of an infinite number of ground-state wave functions of quantum-like oscillators, in the Bose case. The vacuum described by  $\chi_0$  is, of course, defined in the phase-space of a single particle, not in ordinary space as those of quantum field theories.

The wave formalism in phase space corresponding to the wave functions  $\Theta_n$  and the wave equation (17) is, in a certain sense, more general than that based on the second quantization methods, since it allows us to treat also the Boltzmann statistics by considering wave functions  $\Theta_n$  which are neither symmetrical nor anti-symmetrical (distinguishable particles). The relation between the wave function  $\Theta_n$  and the distribution function  $f_n$  is not given by (16) in the case of the Boltzmann statistics, we have instead

$$(26) \quad f_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) = \sum_{\text{perm. } k} |\Theta_n(\mathbf{x}_{k_1}, \dots, \mathbf{x}_{k_n}; \mathbf{p}_{k_1}, \dots, \mathbf{p}_{k_n})|^2,$$

because  $f_n d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_n d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_n$  gives the probability of finding  $n$  particles in the elements of volume  $(d\mathbf{x}_1, d\mathbf{p}_1), \dots, (d\mathbf{x}_n, d\mathbf{p}_n)$  of  $\Omega$ , without specification of which of the similar distinguishable particles is at any of the elements of volume. It will be shown that it is also possible to introduce rules of physical interpretation of the quantum type in the phase space wave formalism, which lead to the usual rules of the classical statistical mechanics.

## 2. — The equation of motion of the states $\chi$ .

We shall from now on denote a point of the phase space of a single particle by  $\tau$ . The corresponding elements of phase space volume will be denoted

<sup>(6)</sup> J. YVON: *La théorie statistique des fluides et l'équation d'état* (Paris, 1935).

<sup>(7)</sup> M. BORN and H. S. GREEN: *Proc. Roy. Soc., A* **188**, 10 (1947).

<sup>(8)</sup> J. G. KIRKWOOD: *Journ. of Chem. Phys.*, **14**, 180 (1946).

by  $d\tau$ . It is convenient to split  $\mathcal{R}$  into two parts:

$$(27) \quad \mathcal{R} = \mathcal{R}_{\text{kin}} + \mathcal{R}_{\text{pot}},$$

$$(28) \quad \mathcal{R}_{\text{kin}} = i \int \psi^*(\tau) \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \psi(\tau) \right)_1 d\tau = -\frac{i}{m} \int \psi^*(\tau) \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \psi(\tau)}{\partial \mathbf{x}} d\tau,$$

$$(29) \quad \begin{aligned} \mathcal{R}_{\text{pot}} &= \frac{i}{2} \iint \psi^*(\tau) \psi^*(\tau') (\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \psi(\tau') \psi(\tau))_2 d\tau d\tau' = \\ &= \frac{i}{2} \iint \psi^*(\tau) \psi^*(\tau') \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \psi(\tau') \frac{\partial \psi(\tau)}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}'} \cdot \frac{\partial \psi(\tau')}{\partial \mathbf{p}'} \psi(\tau) \right\} d\tau d\tau'. \end{aligned}$$

The integrations are extended to the entire phase space of a single particle  $\Omega$ . (When no indication of the integration domain is given, the integration is taken over that phase space). It is easily seen that  $\mathcal{R}_{\text{kin}}$  and  $\mathcal{R}_{\text{pot}}$  are hermitian operators:

$$(30) \quad \mathcal{R}_{\text{kin}} = \mathcal{R}_{\text{kin}}^*, \quad \mathcal{R}_{\text{pot}} = \mathcal{R}_{\text{pot}}, \quad \mathcal{R} = \mathcal{R}^*.$$

It results from the commutation rules (12)-(13) that:

$$(31) \quad [\psi^*(\tau), \mathcal{R}_{\text{kin}}] = i \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \psi^*(\tau) \right)_1, \quad [\psi(\tau), \mathcal{R}_{\text{kin}}] = i \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \psi(\tau) \right)_1,$$

$$(32) \quad \begin{cases} [\psi^*(\tau), \mathcal{R}_{\text{pot}}] = i \int (\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \psi^*(\tau) \psi^*(\tau'))_2 \psi(\tau') d\tau', \\ [\psi(\tau), \mathcal{R}_{\text{pot}}] = i \int \psi^*(\tau') (\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \psi(\tau') \psi(\tau))_2 d\tau', \end{cases}$$

$$(33) \quad [A, B] = AB - BA,$$

Hence

$$(34) \quad [\psi^*(\tau) \psi(\tau), \mathcal{R}_{\text{kin}}] = -i \mathbf{p} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \{ \psi^*(\tau) \psi(\tau) \},$$

$$(35) \quad [\psi^*(\tau) \psi(\tau), \mathcal{R}_{\text{pot}}] = i \int (\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \psi^*(\tau) \psi^*(\tau') \psi(\tau') \psi(\tau))_2 d\tau',$$

and by integrating both sides of (34) and (35) we get:

$$(36) \quad [N_{\text{op}}, \mathcal{R}_{\text{kin}}] = [N_{\text{op}}, \mathcal{R}_{\text{pot}}] = [N_{\text{op}}, \mathcal{R}] = 0.$$

It follows from (36) and (10) that:

$$(37) \quad i \frac{d}{dt} (N_{\text{op}} \chi) = N_{\text{op}} \mathcal{R} \chi = \mathcal{R} (N_{\text{op}} \chi).$$

If  $\chi(t_0)$  is an eigenfunctional of  $N_{\text{op}}$ ,

$$(38) \quad N_{\text{op}}\chi(t_0) = n\chi(t_0) \quad (n = c - \text{number}),$$

the same will happen with  $\chi(t)$  for any value of  $t$

$$(39) \quad N_{\text{op}}\chi(t) = n\chi(t),$$

because  $N_{\text{op}}\chi(t)$  is the solution of (10) determined by the initial value  $n\chi(t_0)$  and the same holds for  $n\chi(t)$ . The eigenvalue  $n$  can only be 0 or a positive integer, as in quantum field theory. (We shall prove later this theorem). We shall denote by  $\chi_n(t)$  any functional satisfying both (10) and (39).

We can now obtain a very simple relation between the equation (10) and the Liouville equation (8)

$$(40) \quad \frac{\partial}{\partial t} \gamma_n(t; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = (H_n, \gamma_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n))_n,$$

with

$$(41) \quad \gamma_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n) = \psi(\tau_1)\psi(\tau_2) \dots \psi(\tau_n)\chi_n(t) = \prod_{l=1}^n \psi(\tau_l)\chi_n(t).$$

It follows from (12) and (13) that

$$(42) \quad [\psi(\tau'), \psi^*(\tau)\psi(\tau)] = \delta(\tau - \tau')\psi(\tau),$$

with

$$(43) \quad \delta(\tau - \tau') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'),$$

hence

$$(44) \quad \left[ \prod_{l=1}^n \psi(\tau_l), \psi^*(\tau)\psi(\tau) \right] = \sum_{l'=1}^n \delta(\tau - \tau_{l'}) \prod_{l=1}^n \psi(\tau_l).$$

It is easily seen, by taking into account (12), (13) and (44), that

$$\begin{aligned} (45) \quad & \left[ \prod_{l=1}^n \psi(\tau_l), \psi^*(\tau')\psi^*(\tau) \frac{\partial \psi(\tau)}{\partial \mathbf{p}} \psi(\tau') \right] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \\ & = \left[ \prod_{l=1}^n \psi(\tau_l), \psi^*(\tau')\psi(\tau')\psi^*(\tau) \frac{\partial \psi(\tau)}{\partial \mathbf{p}} \right] \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \\ & - \delta(\tau - \tau') \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left[ \prod_{l=1}^n \psi(\tau_l), \psi^*(\tau) \frac{\partial \psi(\tau)}{\partial \mathbf{p}} \right] = \\ & = \psi^*(\tau')\psi(\tau') \cdot \sum_{r=1}^n \delta(\tau - \tau_r) \left( \Phi(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_r), \prod_{l=1}^n \psi(\tau_l) \right)_1 + \\ & + \sum_{r=1}^n \delta(\tau_r - \tau') \prod_{l=1}^n \psi(\tau_l)\psi^*(\tau) \frac{\partial \psi(\tau)}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \\ & - \delta(\tau - \tau') \sum_{r=1}^n \left( \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r), \prod_{l=1}^n \psi(\tau_l) \right)_1 \delta(\tau - \tau_r). \end{aligned}$$



We get from (28) and (44)

$$(46) \quad \left[ \prod_{l=1}^n \psi(\tau_l), \mathcal{R}_{\text{kin}} \right] = i \left( \sum_{l=1}^n \frac{\mathbf{p}_l^2}{2m}, \prod_{l=1}^n \psi(\tau_l) \right)_n,$$

and from (29) and (45)

$$(47) \quad \left[ \prod_{l=1}^n \psi(\tau_l), \mathcal{R}_{\text{pot}} \right] = \frac{i}{2} \left( \sum_{s \neq r} \sum_r \Phi(\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_s), \prod_{l=1}^n \psi(\tau_l) \right)_n + \\ + i \int \psi^*(\tau) \left( \sum_{r=1}^n \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r), \psi(\tau) \prod_{l=1}^n \psi(\tau_l) \right)_{n+1} d\tau,$$

hence

$$(48) \quad \left[ \prod_{l=1}^n \psi(\tau_l), \mathcal{R} \right] = i \left( H_n, \prod_{l=1}^n \psi(\tau_l) \right)_n + \\ + i \int \psi^*(\tau) \left( \sum_{r=1}^n \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r), \psi(\tau) \prod_{l=1}^n \psi(\tau_l) \right)_{n+1} d\tau.$$

It follows from (10), (41) and (48) that:

$$(49) \quad i \frac{\partial}{\partial t} \gamma_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n) = \prod_{l=1}^n \psi(\tau_l) \mathcal{R} \chi_n(t) = \mathcal{R} \prod_{l=1}^n \psi(\tau_l) \chi_n(t) + \\ - i \left( H_n, \prod_{l=1}^n \psi(\tau_l) \right)_n \chi_n(t) - i \int \psi^*(\tau) \left( \sum_{r=1}^n \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r), \psi(\tau) \prod_{l=1}^n \psi(\tau_l) \right)_{n+1} d\tau \chi_n(t).$$

By integrating both sides of (44) we get

$$(50) \quad \prod_{l=1}^n \psi(\tau_l) N_{\text{op}} = (N_{\text{op}} + n) \prod_{l=1}^n \psi(\tau_l),$$

hence

$$(51) \quad n \psi(\tau) \prod_{l=1}^n \psi(\tau_l) \chi_n(t) = \psi(\tau) \prod_{l=1}^n \psi(\tau_l) N_{\text{op}} \chi_n(t) = \\ = (N_{\text{op}} + n + 1) \psi(\tau) \prod_{l=1}^n \psi(\tau_l) \chi_n(t),$$

$$(52) \quad N_{\text{op}} \psi(\tau) \prod_{l=1}^n \psi(\tau_l) \chi_n(t) = - \psi(\tau) \prod_{l=1}^n \psi(\tau_l) \chi_n(t).$$

Since  $N_{\text{op}}$  has no negative eigenvalues, it follows from (52) that:

$$(53) \quad \psi(\tau) \prod_{l=1}^n \psi(\tau_l) \chi_n(t) = 0.$$

By taking into account the definition of  $\mathcal{K}$  and (53), we see that the first and third terms in the right hand side of (49) are nil. Thus we get equation (40). It is still necessary to prove that there are non vanishing functionals of the type  $\gamma_n(t; \tau_1, \dots)$ , this point will become obvious later.

### 3. — The unitary operator of the motion of the states $\chi$ .

The operator  $\mathcal{K}$  being hermitian,  $\exp[-it\mathcal{K}]$  is unitary. We shall use the following notation:

$$(54) \quad \mathcal{U}(t) = \exp[-it\mathcal{K}].$$

The Liouville equation (8) can be written as follows

$$(55) \quad i \frac{\partial f_n}{\partial t} = L_n f_n;$$

$L_n$  being the hermitian operator

$$(56) \quad L_n = i \sum_{l=1}^n \left( \frac{\partial H_n}{\partial \mathbf{x}_l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_l} - \frac{\partial H_n}{\partial \mathbf{p}_l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_l} \right).$$

We have obviously

$$(57) \quad \chi(t) = \mathcal{U}(t)\chi(0),$$

and

$$(58) \quad f_n(t) = \exp[-itL_n]f_n(0) = U_n(t)f_n(0).$$

We have already found a relation between equations (8) and (10) in section 2. Now we shall go further by showing that  $\mathcal{U}(t)$  can be expressed in terms of the  $U_n$ :

$$(59) \quad \mathcal{U}(t) = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \psi^*(\tau_n) \psi^*(\tau_{n-1}) \dots \psi^*(\tau_1) U_n(t) \{ \psi(\tau_1) \dots \psi(\tau_n) \} d\tau_1 \dots d\tau_n P_n.$$

The  $P_n$  are the projection operators corresponding to the eigenvalues  $n$  of  $N_{\text{op}}$ :

$$(60) \quad N_{\text{op}} = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1, \quad P_n P_{n'} = P_n \delta_{nn'}.$$

It follows from the spectral decomposition (60) that

$$(61) \quad N_{\text{op}} P_n = n P_n,$$

hence for any  $\chi$ :

$$(62) \quad N_{\text{op}}(P_n \chi) = n P_n \chi.$$

In order to prove (59) it is sufficient to show that the right hand side satisfies the two following equations

$$(63) \quad P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \psi^*(\tau_n) \dots \psi^*(\tau_1) \psi(\tau_1) \dots \psi(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n P_n = \mathcal{U}(0) = 1,$$

$$(64) \quad i \frac{d}{dt} \left\{ P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \psi^*(\tau_n) \dots \psi^*(\tau_1) U_n(t) \{ \psi(\tau_1) \dots \psi(\tau_n) \} d\tau_1 \dots d\tau_n P_n \right\} = \\ = \mathcal{R} \left\{ P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \psi^*(\tau_n) \dots \psi^*(\tau_1) U_n(t) \{ \psi(\tau_1) \dots \psi(\tau_n) \} d\tau_1 \dots d\tau_n P_n \right\},$$

since  $\mathcal{U}(t)$  is determined by the equations

$$(65) \quad i \frac{d\mathcal{U}}{dt} = \mathcal{R}\mathcal{U}, \quad \mathcal{U}(0) = 1.$$

Equation (63) is a consequence of the second equation (60) and the following one:

$$(66) \quad \frac{1}{n!} \int \psi^*(\tau_n) \dots \psi^*(\tau_1) \psi(\tau_1) \dots \psi(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \chi_n = \chi_n.$$

Equation (66) is obviously true for  $n = 1$ . If it is valid for  $n = r$  it will also hold for  $n = r + 1$ , because  $\psi(\tau) \chi_{r+1}$  is a  $\chi_r$ , as a consequence of (50), and we have:

$$(67) \quad \frac{1}{(r+1)!} \int \psi^*(\tau_{r+1}) \dots \psi^*(\tau_1) \psi(\tau_1) \dots \psi(\tau_{r+1}) d\tau_1 \dots d\tau_{r+1} \chi_{r+1} = \\ = \frac{1}{r+1} \int d\tau_{r+1} \psi^*(\tau_{r+1}) \left\{ \frac{1}{r!} \int \psi^*(\tau_r) \dots \psi^*(\tau_1) \psi(\tau_1) \dots \psi(\tau_r) d\tau_1 \dots d\tau_r \right\} \psi(\tau_{r+1}) \chi_{r+1} = \\ = \frac{1}{r+1} \int d\tau_{r+1} \psi^*(\tau_{r+1}) \psi(\tau_{r+1}) \chi_{r+1} = \frac{1}{r+1} N_{\text{op}} \chi_{r+1} = \chi_{r+1}.$$

It results from (62) that  $P_n \chi$  is a  $\chi_n$ , provided it is not nil, therefore we have

$$(68) \quad \frac{1}{n!} \int \psi^*(\tau_n) \dots \psi^*(\tau_1) \psi(\tau_1) \dots \psi(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n P_n = P_n,$$

and (63) is equivalent to  $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ .

It results from (48) that:

$$(69) \quad [\mathcal{R}, \psi^*(\tau_n) \dots \psi^*(\tau_1)] = \{L_n \{ \psi(\tau_1) \dots \psi(\tau_n) \} \}^* - \\ - i \int \left( \sum_{l=1}^n \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l), \psi^*(\tau_n) \dots \psi^*(\tau_l) \psi^*(\tau) \right)_{n+1} \psi(\tau) d\tau.$$

Hence

$$(70) \quad \frac{1}{n!} \mathcal{R} \int \psi^*(\tau_n) \dots \psi^*(\tau_1) U_n(t) \{ \psi(\tau_1) \dots \psi(\tau_n) \} d\tau_1 \dots d\tau_n \chi_n = \\ = \frac{1}{n!} \int \psi^*(\tau_n) \dots \psi^*(\tau_1) U_n(t) \{ \mathcal{R} \psi(\tau_1) \dots \psi(\tau_n) \} d\tau_1 \dots d\tau_n \chi_n + \\ + \frac{1}{n!} \int \psi^*(\tau_n) \dots \psi^*(\tau_1) L_n U_n(t) \{ \psi(\tau_1) \dots \psi(\tau_n) \} d\tau_1 \dots d\tau_n \chi_n + \\ + \frac{i}{n!} \int \psi^*(\tau_n) \dots \psi^*(\tau_1) \psi^*(\tau) \left( \sum_{l=1}^n \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l), U_n(t) \{ \psi(\tau) \psi(\tau_1) \dots \psi(\tau_n) \} \right)_{n+1} d\tau_1 \dots d\tau_n \chi_n,$$

since the  $L$  are hermitian. It results from (53) that the first and third terms in the right hand side of (70) are nil, therefore:

$$(71) \quad \frac{1}{n!} \mathcal{R} \int \psi^*(\tau_n) \dots \psi^*(\tau_1) U_n(t) \{ \psi(\tau_1) \dots \psi(\tau_n) \} d\tau_1 \dots d\tau_n P_n = \\ = \frac{i}{n!} \frac{d}{dt} \int \psi^*(\tau_n) \dots \psi^*(\tau_1) U_n(t) \{ \psi(\tau_1) \dots \psi(\tau_n) \} d\tau_1 \dots d\tau_n P_n.$$

Equation (64) follows immediately from (71), since  $\mathcal{R}P_0 = 0$ . Thus we have proven (59).

It is interesting to notice that the expansion (59) does not correspond to a perturbation method. If we would know the  $U_n$  for all the values of  $n$  we could get exactly  $\mathcal{Q}(t)$ . Usually we know only  $U_1$  and  $U_2$ . In the trivial case of non interacting particles we can determine all the  $U_n$ .

In order to proceed further we must investigate the nature of the spectral decomposition of  $N_{op}$ . This will be done in the next section.

#### 4. — The spectral decomposition of $N_{op}$ .

We shall now prove that the eigenvalues of the operator  $N(\omega)$

$$(72) \quad N(\omega) = \int_{\omega} \psi^*(\tau) \psi(\tau) d\tau,$$

$\omega$  being any volume of the phase space  $\Omega$  of a single particle, are 0 and the positive integers. In particular when  $\omega$  coincides with the entire phase space,

the operator  $N(\omega)$  becomes  $N_{\omega}$ . Let us introduce a complete set of orthogonal and normalized functions for the volume  $\omega$ , which will be denoted by  $u_s(\tau; \omega)$ :

$$(73) \quad \int_{\omega} u_s^*(\tau; \omega) u_{s'}(\tau; \omega) d\tau = \delta_{ss'},$$

$$(74) \quad \sum_{s=0}^{\infty} u_s^*(\tau; \omega) u_s(\tau'; \omega) = \delta(\tau - \tau').$$

We shall expand the operator  $\psi(\tau)$  in terms of the  $u_s$ :

$$(75) \quad \psi(\tau) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s u_s(\tau; \omega), \quad \psi^*(\tau) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s^* u_s^*(\tau; \omega).$$

The commutation rules (12) and (13) can be obtained by taking:

$$(76) \quad [a_s, a_{s'}^*]_{\pm} = \delta_{ss'}, \quad [a_s, a_{s'}]_{\pm} = [a_s^*, a_{s'}^*]_{\pm} = 0.$$

The expression of  $N(\omega)$  in terms of the  $(a, a^*)$  is:

$$(77) \quad N(\omega) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s^* a_s = \sum_{s=0}^{\infty} N_s(\omega).$$

It is easily seen that the  $N_s$  commute:

$$(78) \quad [N_s(\omega), N_{s'}(\omega)] = 0.$$

The determination of the eigenvalues of the  $N_s$  is particularly simple in the Fermi case, because of the symmetry of the commutation rules with respect to the  $a$  and  $a^*$ .  $a_s^* a_s$  and  $a_s a_s^*$  must have the same eigenvalues, therefore  $N_s$  and  $1 - N_s$  have the same eigenvalues, which must be 0 and 1. (The  $N_s$  are projection operators).

In the case of the Bose statistics, the determination of the eigenvalues is somewhat more complicated. The procedure is exactly the same as in quantum theory (harmonic oscillator). Let  $n$  be an eigenvalue of  $N_s$  and  $\zeta_n$  the corresponding eigenfunction.  $a_s^* \zeta_n$  is an eigenfunction corresponding to the eigenvalue  $n + 1$ , because

$$(79) \quad a_s^* a_s (a_s^* \zeta_n) = a_s^* (a_s^* a_s \zeta_n) + a_s^* \zeta_n = (n + 1) a_s^* \zeta_n,$$

and  $a_s^* \zeta_n$  does not vanish since  $n$  must be positive and we have:

$$(80) \quad (a_s^* \zeta_n, a_s^* \zeta_n) = (\zeta_n, a_s a_s^* \zeta_n) = (n + 1) (\zeta_n, \zeta_n) \neq 0.$$

On the other hand we have

$$(81) \quad a_s^* a_s (a_s \zeta_n) = a_s (a_s^* a_s \zeta_n) - a_s \zeta_n = (n - 1) a_s \zeta_n,$$

so that  $a_s \zeta_n$  will be an eigenfunction corresponding to the eigenvalue  $n-1$ , if it does not vanish. Since

$$(82) \quad (a_s \zeta_n, a_s \zeta_n) = (\zeta_n, a_s^* a_s \zeta_n) = n(\zeta_n, \zeta_n),$$

$a_s \zeta_n$  will not vanish if  $n \neq 0$ . If  $N_s(\omega)$  would have a non integer eigenvalue, it would also have negative eigenvalues, since it would be possible to get successively non vanishing eigenfunctions corresponding to eigenvalues  $n-1$ ,  $n-2$ , ... Therefore the eigenvalues must be the positive integers and 0, because from any positive integer eigenvalue follows the existence of all the others, since we can form successively non vanishing eigenfunctions corresponding to all the other positive integers and 0.

In the case of the Bose statistics, the formalism is closely related to the quantum theory of the harmonic oscillators. This is easily seen by splitting each  $a$  into a hermitian and a anti-hermitian part:

$$(83) \quad a_s = \frac{1}{\sqrt{2}} (\beta_s - i\alpha_s), \quad a_s^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\beta_s + i\alpha_s),$$

$$(84) \quad [\beta_s, \alpha_{s'}] = -i\delta_{ss'}, \quad [\beta_s, \beta_{s'}] = [\alpha_s, \alpha_{s'}] = 0.$$

We have:

$$(85) \quad N_s(\omega) = \frac{1}{2} (\beta_s^2 + \alpha_s^2 - 1), \quad N(\omega) = \frac{1}{2} \sum_s (\beta_s^2 + \alpha_s^2 - 1).$$

Thus we have for  $N_s(\omega)$  an expression similar to that of the hamiltonian of a quantal harmonic oscillator. In the case of  $\omega = \Omega$ , we have:

$$(86) \quad N_{op} = \frac{1}{2} \sum_s (\beta_s^2 + \alpha_s^2 - 1).$$

It follows from the theory of the harmonic oscillator that the  $\chi(\alpha)$  describing a state in which there are no particles is

$$(87) \quad \chi_0^{(B)}(\alpha) = \prod_{s=0}^{\infty} \exp \left[ -\frac{1}{2} \alpha_s^2 \right] = \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_s \alpha_s^2 \right].$$

This wave functional is not normalized. Strictly speaking, it cannot be normalized, because the normalization factor for each oscillator wave function is  $\pi^{-1/4}$ , so that we would have to multiply  $\chi_0(\alpha)$  by a vanishing factor. This difficulty is not serious, because in the physical interpretation we shall need the probability distribution corresponding to the square of the absolute value of the wave functional, exactly as in quantum mechanics. It is well known



that a probability distribution in an infinite dimensional product space is determined by the probability distributions in the factor spaces (see, for instance, P. R. HALMOS, *Measure Theory*, (New York, 1950, chapter VII). In the case of the eigenfunctions of the  $N(\omega)$ , the factor spaces are one dimensional and the corresponding probability densities are given by squares of normalized Hermite functions, as known from the quantum theory of the harmonic oscillator.

In the case of the Fermi statistics, the present formalism is closely related to the quantum theory of spin. Indeed, the commutation rules (76) are satisfied by the Jordan-Wigner operators

$$(88) \quad a_s = \frac{1}{2} \xi^{(s)} (\sigma_x^{(s)} - i\sigma_y^{(s)}), \quad a_s^* = \frac{1}{2} \xi^{(s)} (\sigma_x^{(s)} + i\sigma_y^{(s)}),$$

$$(89) \quad \xi^{(s)} = \sigma_z^{(0)} \sigma_z^{(1)} \dots \sigma_z^{(s-1)},$$

the  $\sigma^{(s)}$  being the Pauli operator spin vectors for a system of an infinite number of electrons. It results from (88) and (89) that:

$$(90) \quad a_s^* a_s = \frac{1}{2} (1 + \sigma_z^{(s)}),$$

Thus we get a new proof that the eigenvalues of  $N_s$  are 0 and 1. In order to get the wave function of the state in which there are no particles, we shall use a representation in which the  $a_s^* a_s$  are diagonal and a wave functional depending on the eigenvalues of the  $N_s$ :

$$(91) \quad \chi_0^{(F)}(N) = \prod_{s=0}^{\infty} \delta_{0, N_s}.$$

In this representation the integration with respect to the  $N$  is an ordinary sum and we get

$$(92) \quad (\chi_0^{(F)}(N), \chi_0^{(F)}(N)) = 1,$$

so that the wave function of the vacuum is normalized. In the case of the Bose statistics we can also diagonalize the  $N_s$  and a normalized wave function of the vacuum is given by a formula similar to (91):

$$(93) \quad \chi_0^{(B)}(N) = \prod_{s=0}^{\infty} \delta_{0, N_s}, \quad (\chi_0^{(B)}(N), \chi_0^{(B)}(N)) = 1.$$

We shall now introduce the  $\chi_{s_1 \dots s_n}$ :

$$(94) \quad \chi_{s_1 \dots s_n} = a_{s_1}^* a_{s_2}^* \dots a_{s_n}^* \chi_0 = \prod_{i=1}^n a_{s_i}^* \chi_0.$$

It is easily seen that:

$$(95) \quad \left[ N_{\text{op}}, \prod_{l=1}^n a_{s_l}^* \right] = n \prod_{l=1}^n a_{s_l}^*.$$

Hence

$$(96) \quad N_{\text{op}} \chi_{s_1 \dots s_n} = n \chi_{s_1 \dots s_n},$$

so that  $\chi_{s_1 \dots s_n}$  will be an eigenfunctional of  $N_{\text{op}}$ , describing a  $n$ -particle state, if it is not nil. Since for any value of  $n$

$$(97) \quad (\chi_{s_1 \dots s_n}, \chi_{s_1 \dots s_n}) = (\chi_0, a_{s_n} \dots a_{s_1} a_{s_1}^* \dots a_{s_n}^* \chi_0),$$

we have in particular

$$(98) \quad (\chi_{s_1}, \chi_{s_1}) = (\chi_0, a_{s_1} a_{s_1}^* \chi_0) = (\chi_0, \chi_0) \neq 0,$$

so that:

$$(99) \quad \chi_{s_1} \neq 0.$$

Now we must distinguish the two statistics. In the case of the Fermi statistics  $\chi_{s_1 \dots s_n}$  vanishes obviously when two of the  $s$  are equal. If they are all different, we have

$$(100) \quad a_{s_n} \dots a_{s_1} a_{s_1}^* \dots a_{s_n}^* = (a_{s_n} a_{s_n}^*) (a_{s_{n-1}} a_{s_{n-1}}^*) \dots (a_{s_1} a_{s_1}^*),$$

so that

$$(101) \quad (\chi_{s_1 \dots s_n}^{(F)}, \chi_{s_1 \dots s_n}^{(F)}) = (\chi_0^{(F)}, \chi_0^{(F)}), \quad s_l \neq s_{l'}, \text{ for } l \neq l'.$$

In the case of the Bose statistics  $\chi_{s_1 \dots s_n}$  is always a non vanishing functional. Indeed, this is true for  $n = 1$ , but if it is true for  $n = r$  it will also be true for  $n = r + 1$ , since

$$(102) \quad a_{s_{r+1}} a_{s_r} \dots a_{s_1} a_{s_1}^* \dots a_{s_r}^* a_{s_{r+1}}^* = a_{s_r} \dots a_{s_1} a_{s_1}^* \dots a_{s_r}^* (a_{s_{r+1}} a_{s_{r+1}}^*) + \\ + (\delta_{s_1, s_{r+1}} + \delta_{s_2, s_{r+1}} + \dots + \delta_{s_r, s_{r+1}}) a_{s_r} \dots a_{s_1} a_{s_1}^* \dots a_{s_r}^*,$$

and

$$(103) \quad (\chi_{s_1 \dots s_{r+1}}^{(B)}, \chi_{s_1 \dots s_{r+1}}^{(B)}) = \left( 1 + \sum_{l=1}^r \delta_{s_l, s_{r+1}} \right) (\chi_{s_1 \dots s_r}^{(B)}, \chi_{s_1 \dots s_r}^{(B)}) = \\ - \left( \sum_{l=1}^{r-1} \delta_{s_l, s_{r+1}} \right) (\chi_{s_1 \dots s_r}^{(B)}, \chi_{s_1 \dots s_r}^{(B)}) \neq 0.$$

Moreover, we get by successive applications of (103) the following equation

$$(104) \quad (\chi_{s_1 \dots s_n}^{(B)}, \chi_{s_1 \dots s_n}^{(B)}) = \sum_{\text{perm. } k} \delta_{s_1, s_{k_1}} \delta_{s_2, s_{k_2}} \dots \delta_{s_n, s_{k_n}} (\chi_0^{(B)}, \chi_0^{(B)}) = n! \delta_{s, s}^{(n)B} (\chi_0^{(B)}, \chi_0^{(B)}),$$

with

$$(105) \quad \delta_{s, s'}^{(n)B} = \frac{1}{n!} \sum_{\text{perm. } k} \delta_{s_1, s'_{k_1}} \delta_{s_2, s'_{k_2}} \dots \delta_{s_n, s'_{k_n}}.$$

We can write (101) as follows

$$(106) \quad (\chi_{s_1 \dots s_n}^{(F)}, \chi_{s_1 \dots s_n}^{(F)}) = n! \delta_{s, s}^{(n)F} (\chi_0^{(F)}, \chi_0^{(F)}),$$

with

$$(107) \quad \delta_{s, s'}^{(n)F} = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} \delta_{s_1, s'_1} & \delta_{s_1, s'_2} & \dots & \delta_{s_1, s'_n} \\ \delta_{s_2, s'_1} & \delta_{s_2, s'_2} & \dots & \delta_{s_2, s'_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{s_n, s'_1} & \delta_{s_n, s'_2} & \dots & \delta_{s_n, s'_n} \end{vmatrix} = \frac{1}{n!} \sum_{\text{perm. } k} \pm \delta_{s_1, s'_{k_1}} \delta_{s_2, s'_{k_2}} \dots \delta_{s_n, s'_{k_n}}.$$

The above notations allow us to put together (104) and (106):

$$(108) \quad (\chi_{s_1 \dots s_n}, \chi_{s_1 \dots s_n}) = n! \delta_{s, s}^{(n)} (\chi_0, \chi_0).$$

It is easily seen that  $\chi_{s_1 \dots s_n}$  and  $\chi_{s'_1 \dots s'_n}$  are orthogonal if the values of the set  $s'$  cannot be obtained from those of the set  $s$  by permutation. Thereby we can write:

$$(109) \quad (\chi_{s_1 \dots s_n}, \chi_{s'_1 \dots s'_n}) = n! \delta_{s, s'}^{(n)} (\chi_0, \chi_0).$$

It is also clear that

$$(110) \quad (\chi_{s_1 \dots s_n}, \chi_{s'_1 \dots s'_n}) = 0 \quad (n' \neq n).$$

The above considerations show that the set of all the functionals  $(n! \delta_{s, s}^{(n)})^{-1/2} \cdot \chi_{s_1 \dots s_n}$ , with  $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n$  in the Bose case and  $s_1 < s_2 < \dots < s_n$  in that of Fermi, is orthonormal when  $\chi_0$  is normalized. We shall now prove that this set is also complete. The operators  $N_s$  are a complete set of commutable operators in a space  $\mathcal{N}_\chi$ . Therefore the states that are common eigenstates of all the  $N_s$  form necessarily a complete orthogonal set. We can get these

states by taking all the positive integers  $n$  and 0, and choosing in all the possible different ways  $n$  numbers  $s_i$  (allowing for repetition in the case of Bose statistics) and giving to the corresponding  $N_{s_i}$  the eigenvalue 1 and the eigenvalue 0 to all the other  $N_s$ . But thus we get exactly the  $\chi_{s_1 s_2 \dots s_n}$  ( $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \dots \leq s_n$ ).

We shall denote by  $P_{s_1 \dots s_n}$  the projection operator corresponding to the state  $\chi_{s_1 \dots s_n}$ . The fact that the  $\chi_{s_1 \dots s_n}$  form a complete orthogonal set in  $S_\chi$  leads to the equation:

$$(111) \quad P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n} P_{s_1 \dots s_n} = 1.$$

We have obviously:

$$(112) \quad P_n = \sum_{s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n} P_{s_1 \dots s_n}.$$

Thus we obtain the complete spectral resolution of  $N_{op}$ :

$$(113) \quad N_{op} = \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{s_1 \leq \dots \leq s_n} P_{s_1 \dots s_n}.$$

It follows from the definition of a projection operator that

$$(114) \quad P_0 \chi = (\chi_0, \chi) \chi_0, \quad (\chi_0, \chi_0) = 1,$$

and

$$(115) \quad n! \delta_{s, s}^{(n)} P_{s_1 \dots s_n} \chi = (\chi_{s_1 \dots s_n}, \chi) \chi_{s_1 \dots s_n} = (\chi_0, a_{s_n} \dots a_{s_1} \chi) a_{s_1}^* \dots a_{s_n}^* \chi_0,$$

therefore we have:

$$(116) \quad n! \delta_{s, s}^{(n)} P_{s_1 \dots s_n} = a_{s_1}^* \dots a_{s_n}^* P_0 a_{s_n} \dots a_{s_1}.$$

In the Fermi case,  $P_0$  has a very simple expression in terms of the  $a_s a_s^*$

$$(117) \quad P_0^{(F)} = \prod_{s=0}^{\infty} a_s a_s^* = \prod_{s=0}^{\infty} (1 - N_s).$$

## 5. - The basic representation and the Fock method.

Instead of using a discrete set of functions in the space  $\Omega$ , we shall now take the continuous set  $u(\tau, \bar{\tau})$

$$(118) \quad \int u^*(\tau, \bar{\tau}) u(\tau, \bar{\tau}') d\tau = \delta(\bar{\tau} - \bar{\tau}'),$$

$$(119) \quad \int u^*(\tau, \bar{\tau}) u(\tau', \bar{\tau}) d\bar{\tau} = \delta(\tau - \tau').$$

The expansions (75) are now replaced by the following

$$(120) \quad \psi(\tau) = \int a(\bar{\tau}) u(\tau, \bar{\tau}) d\bar{\tau}, \quad \psi^*(\tau) = \int a^*(\bar{\tau}) u^*(\tau, \bar{\tau}) d\bar{\tau},$$

and instead of the commutations rules (76) we have:

$$(121) \quad [a(\bar{\tau}), a^*(\bar{\tau}')]_{\pm} = \delta(\bar{\tau} - \bar{\tau}'), \quad [a(\bar{\tau}), a(\bar{\tau}')]_{\pm} = [a^*(\bar{\tau}), a^*(\bar{\tau}')]_{\pm} = 0.$$

In particular we may use the orthonormal system of the  $\delta(\tau - \bar{\tau})$ :

$$(122) \quad u(\tau, \bar{\tau}) = \delta(\tau - \bar{\tau}), \quad a(\bar{\tau}) = \psi(\bar{\tau}),$$

so that we can work with the  $\psi$  and  $\psi^*$  themselves. In this case  $N_s$  is replaced by  $N(\omega)$  (see (72)). The  $\chi_{s_1, \dots, s_n}$  are now replaced by the  $\chi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$

$$(123) \quad \chi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \psi^*(\tau_1) \psi^*(\tau_2) \dots \psi^*(\tau_n) \chi_0.$$

It results from (44) that

$$(124) \quad \left| \psi^*(\tau) \psi(\tau), \prod_{i=1}^n \psi^*(\tau_i) \right| = \sum_{i=1}^n \delta(\tau - \tau_i) \prod_{i=1}^n \psi^*(\tau_i),$$

hence

$$(125) \quad \left[ N(\omega), \prod_{i=1}^n \psi^*(\tau_i) \right] = N(\omega; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n \psi^*(\tau_i),$$

$N(\omega; \tau_1, \dots, \tau_n)$  being the number of points  $\tau_1 \dots \tau_n$  inside  $\omega$ . (For the sake of simplicity we shall not consider the case in which some of those points lie on the boundary of  $\omega$ ). It follows from (125) that

$$(126) \quad N(\omega) \chi(\tau_1, \dots, \tau_n) = N(\omega; \tau_1, \dots, \tau_n) \chi(\tau_1, \dots, \tau_n),$$

and

$$(127) \quad N_{op} \chi(\tau_1, \dots, \tau_n) = n \chi(\tau_1, \dots, \tau_n).$$

It is easily seen that

$$(128) \quad (\chi(\tau_1, \dots, \tau_n), \chi(\tau'_1, \dots, \tau'_n)) = (\chi_0, \psi(\tau_n) \dots \psi(\tau_1) \psi^*(\tau'_1) \dots \psi^*(\tau'_n) \chi_0),$$

and by using this equation we can show, as in the preceding section, that

$$(129) \quad (\chi(\tau_1, \dots, \tau_n), \chi(\tau'_1, \dots, \tau'_n)) = n! \delta^{(n)}(\tau, \tau') (\chi_0, \chi_0),$$

with

$$(130) \quad \delta_B^{(n)}(\tau, \tau') = \frac{1}{n!} \sum_{\text{perm. } k} \delta(\tau_1 - \tau'_{k_1}) \delta(\tau_2 - \tau'_{k_2}) \dots \delta(\tau_n - \tau'_{k_n}),$$

$$(131) \quad \delta_F^{(n)}(\tau, \tau') = \frac{1}{n!} \begin{array}{cccc} \delta(\tau_1 - \tau'_1) & \delta(\tau_1 - \tau'_2) & \dots & \delta(\tau_1 - \tau'_n) \\ \delta(\tau_2 - \tau'_1) & \delta(\tau_2 - \tau'_2) & \dots & \delta(\tau_2 - \tau'_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta(\tau_n - \tau'_1) & \delta(\tau_n - \tau'_2) & \dots & \delta(\tau_n - \tau'_n) \end{array}.$$

There is also a relation corresponding to (110):

$$(132) \quad (\chi(\tau_1, \dots, \tau_n), \chi(\tau'_1, \dots, \tau'_{n'})) = 0 \quad (n \neq n').$$

The same considerations applied to the discrete case show that the  $\chi(\tau_1, \dots, \tau_n)$  form a complete set of orthogonal functionals. The situation with respect to the normalization is somewhat different, because of the continuous set of indices. We shall assume that  $\chi_0$  is normalized as before and we shall use a definition of the normalization which makes of the  $1/\sqrt{n!}(\chi(\tau_1, \dots, \tau_n))$  normalized functionals.

We shall introduce projection operators  $P(\tau_1, \dots, \tau_n)$ :

$$(133) \quad \begin{aligned} n! P(\tau_1, \dots, \tau_n) \chi &= (\chi(\tau_1, \dots, \tau_n), \chi) \chi(\tau_1, \dots, \tau_n) = \\ &= (\chi_0, \psi(\tau_n) \dots \psi(\tau_1) \chi) \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_n) \chi_0. \end{aligned}$$

It follows from (133) that:

$$(134) \quad P(\tau_1, \dots, \tau_n) = \frac{1}{n!} \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_n) P_0 \psi(\tau_n) \dots \psi(\tau_1).$$

It is easily seen that:

$$(135) \quad P(\tau_1, \dots, \tau_n) P(\tau'_1, \dots, \tau'_{n'}) = 0, \quad (n \neq n'),$$

$$(136) \quad P(\tau_1, \dots, \tau_n) P(\tau'_1, \dots, \tau'_n) = \delta^{(n)}(\tau, \tau') P(\tau_1, \dots, \tau_n).$$

The analogue of (111) is

$$(137) \quad P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int P(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n = 1,$$



and we have:

$$(138) \quad P_n = \int P(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n.$$

The equation (138) is an immediate consequence of (137). In order to prove (137) it is sufficient to show that the operator in the left hand side applied to the  $\chi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$  leaves them unchanged. This results from the following relation:

$$(139) \quad \int P(\tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_n) d\tau'_1 \dots d\tau'_n \chi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \\ = \int \chi(\tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_n) \delta^{(n)}(\tau', \tau) d\tau'_1 \dots d\tau'_n = \chi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n).$$

The expansion of a functional  $\chi$  in terms of the  $\chi(\tau_1, \dots, \tau_n)$  is:

$$(140) \quad \chi = \Theta_0 \chi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \int \Theta_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \chi(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau \dots d\tau_n.$$

This expansion is equivalent to the Fock <sup>(3)</sup> type of formalism, in which any state of the field is described by a sequence of functions  $\Theta_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ). The representation whose basic vectors are the  $\chi(\tau_1, \dots, \tau_n)$  will be called the basic representation. The Fock functions  $\Theta_n$  are the components of the vector  $\chi$  in the basic representation:

$$(141) \quad \Theta_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\chi, \chi(\tau_1, \dots, \tau_n)) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left( \chi, \prod_{i=1}^n \psi^*(\tau_i) \chi_0 \right).$$

We get from (140) and (129) the fundamental formulas

$$(142) \quad (\chi, \chi) = \left\{ |\Theta_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \int |\Theta_n(\tau_1, \dots, \tau_n)|^2 d\tau_1 \dots d\tau_n \right\},$$

and

$$(143) \quad (\chi, \chi') = \left\{ \Theta_0^* \Theta'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int \Theta_n^*(\tau_1, \dots, \tau_n) \Theta_n(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \right\}.$$

The matrix elements of an operator  $A$  acting on the  $\chi$ , in the basic representation, are

$$(144) \quad \langle \tau_1, \dots, \tau_n | A | \tau'_1, \dots, \tau'_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!} \sqrt{n'!}} (\chi(\tau_1, \dots, \tau_n), A \chi(\tau'_1, \dots, \tau'_n)).$$

we shall now introduce the  $n$ -particle part  $A^{(n)}$  of an operator  $A$ :

$$(145) \quad A^{(n)} = P_n A P_n.$$

The only non vanishing matrix elements of  $A^{(n)}$  are:

$$(146) \quad \langle \tau_1, \dots, \tau_n | A^{(n)} | \tau'_1, \dots, \tau'_n \rangle = \langle \tau_1, \dots, \tau_n | A | \tau'_1, \dots, \tau'_n \rangle.$$

In the case of an operator which commutes with  $N_{\text{op}}$  we have

$$(147) \quad [A, P_n] = 0,$$

so that:

$$(148) \quad A^{(n)} = A P_n, \quad A = \sum_{n=0}^{\infty} A^{(n)}.$$

The density operators  $\varrho_n$  defined by (23) commute with  $N_{\text{op}}$

$$(149) \quad [N_{\text{op}}, \varrho_n(\tau_1, \dots, \tau_n)] = 0,$$

as a consequence of (44) and (125). Since

$$\begin{aligned} (150) \quad \sum_{r=n}^{\infty} \frac{1}{(r-n)!} \int \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_r) P_0 \psi(\tau_r) \psi(\tau_{r-1}) \dots \psi(\tau_1) d\tau_{n+1} \dots d\tau_r = \\ = \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_n) \sum_{r=n}^{\infty} \int P(\tau_{n+1}, \dots, \tau_r) d\tau_{n+1} \dots d\tau_r \psi(\tau_n) \dots \psi(\tau_1) = \\ = \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_n) \sum_{s=0}^{\infty} \int P(\tau'_1, \dots, \tau'_s) d\tau'_1 \dots d\tau'_s \psi(\tau_n) \dots \psi(\tau_1) = \\ = \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_n) \psi(\tau_n) \dots \psi(\tau_1) = \varrho_n(\tau_1, \dots, \tau_n), \end{aligned}$$

we have:

$$(151) \quad \varrho_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \sum_{r=n}^{\infty} \frac{r!}{(r-n)!} \int P(\tau_1, \dots, \tau_r) d\tau_{n+1} \dots d\tau_r.$$

To any additive (\*) physical quantity  $F(\tau_1, \dots, \tau_n)$ , depending symmetrically on the variables of  $n$  particles, corresponds an operator  $F_{\text{op}}$

$$(152) \quad F_{\text{op}} = \frac{1}{n!} \int F(\tau_1, \dots, \tau_n) \varrho_n(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n.$$

(\*) The value of the corresponding quantity in the case of a system of  $r$  particles ( $r > n$ ) is the sum of its values for all the  $\binom{r}{n}$  different groups of particles.

We assume that the quantity  $F$  has no meaning for a system with less than  $n$ -particles. The first term in (20) is the operator corresponding to the kinetic energy of a particle and the second term to the potential energy of a pair of particles. It follows from (151) that

$$(153) \quad F = \sum_{r=n}^{\infty} \binom{r}{n} \int F(\tau_1, \dots, \tau_n) P(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r) d\tau_1 \dots d\tau_r,$$

thus:

$$(154) \quad F_{\text{op}}^{(r)} = \binom{r}{n} \int F(\tau_1, \dots, \tau_n) P(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r) d\tau_1 \dots d\tau_r \quad (r \geq n).$$

We get from (154), (140) and (129)

$$(155) \quad F_{\text{op}}^{(r)} \chi = \frac{1}{\sqrt{r!}} \binom{r}{n} \int F(\tau_1, \dots, \tau_n) \Theta_r(\tau_1, \dots, \tau_r) \chi(\tau_1, \dots, \tau_r) d\tau_1 \dots d\tau_r,$$

hence:

$$(156) \quad (\chi, F_{\text{op}}^{(r)} \chi) = \binom{r}{n} \int F(\tau_1, \dots, \tau_n) |\Theta_r(\tau_1, \dots, \tau_r)|^2 d\tau_1 \dots d\tau_r.$$

As particular cases of (156) we have:

$$(157) \quad (\chi, \mathcal{H}_{\text{kin}}^{(r)} \chi) = \int \left( \frac{P_1^2}{2m} + \dots + \frac{P_r^2}{2m} \right) |\Theta_r(\tau_1, \dots, \tau_r)|^2 d\tau_1 \dots d\tau_r,$$

$$(158) \quad (\chi, \mathcal{H}_{\text{pot}}^{(r)} \chi) = \frac{1}{2} \int \sum_{i=1}^r \sum_{i' \neq i} \Phi(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i'}) |\Theta_r(\tau_1, \dots, \tau_r)|^2 d\tau_1 \dots d\tau_r.$$

In the derivation of (157) and (158) we took into account the fact that  $|\Theta_r(\tau_1, \dots, \tau_r)|^2$  is a symmetrical function of the  $\tau_1, \dots, \tau_r$  in both statistics.

We shall now prove that, in the case of a solution  $\chi(t)$  of (10), the  $\Theta_n$  satisfy the Liouville equation (17). It is easily seen that

$$(159) \quad \mathcal{R}\chi(\tau_1, \dots, \tau_n) = -i(H_n(\tau_1, \dots, \tau_n), \chi(\tau_1, \dots, \tau_n))_n,$$

by taking into account the relation (48), hence:

$$\begin{aligned} (160) \quad \mathcal{R}\chi(t) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{\sqrt{n!}} \int \Theta_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n) \cdot \\ &\quad \cdot (H_n(\tau_1, \dots, \tau_n), \chi(\tau_1, \dots, \tau_n))_n d\tau_1 \dots d\tau_n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{\sqrt{n!}} \int (H_n(\tau_1, \dots, \tau_n), \Theta_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n))_n \chi(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n = \\ &= i \frac{\partial \Theta_0}{\partial t} \chi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{\sqrt{n!}} \int \frac{\partial}{\partial t} \Theta_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n) \chi(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n. \end{aligned}$$

Therefore we have:

$$(161) \quad \frac{\partial \Theta_0}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \Theta_n}{\partial t} = (H_n(\tau_1, \dots, \tau_n), \Theta_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n))_n.$$

The expansion (140) of the solutions of equation (10), and the equations (161) can be derived from (59). Indeed, we have:

$$(162) \quad \chi(t) = \mathcal{U}(t)\chi(0) = \\ = P_0\chi(0) + \frac{1}{n!} \sum_{n=1}^{\infty} \int \psi^*(\tau_n) \dots \psi^*(\tau_1) U_n(t) \{ \psi(\tau_1) \dots \psi(\tau_n) \} d\tau_1 \dots d\tau_n P_n\chi(0).$$

It is obvious that

$$(163) \quad P_0\chi(0) = \Theta_0\chi_0 \quad \text{with} \quad \Theta_0 = \text{constant},$$

and as a consequence of (138) and (133)

$$(164) \quad P_n\chi(0) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \int \Theta_n(0; \tau'_1, \dots, \tau'_n) \chi(\tau'_1, \dots, \tau'_n) d\tau'_1 \dots d\tau'_n,$$

with

$$(165) \quad \Theta_n(0; \tau_1, \dots, \tau'_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\chi(\tau'_1, \dots, \tau'_n), \chi(0)).$$

Since

$$(166) \quad (\chi_n(\tau_1, \dots, \tau_n), \chi_n(\tau'_1, \dots, \tau'_n)) = \\ = (\chi_0, \psi(\tau_n) \dots \psi(\tau_1) \psi^*(\tau'_1) \dots \psi^*(\tau'_n) \chi_0) = n! \delta^{(n)}(\tau, \tau'),$$

we have:

$$(167) \quad \psi(\tau_n) \dots \psi(\tau_1) \psi^*(\tau'_1) \dots \psi^*(\tau'_n) \chi_0 = n! \delta^{(n)}(\tau, \tau') \chi_0.$$

It results from (162) and (167) that:

$$(168) \quad \chi(t) = \Theta_0\chi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \int \{ U_n^{-1}(t) \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_n) \} \Theta_n(0; \tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \chi_0 = \\ = \Theta_0\chi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \int \{ U_n(t) \Theta_n(0; \tau_1, \dots, \tau_n) \} \chi(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n.$$

This is exactly the expansion of  $\chi(t)$  in terms of the  $\chi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ , with  $\Theta_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n)$  satisfying (161). We get from (59), (138) and (134) by taking into account (167):

$$(169) \quad \mathcal{U}(t) = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_n) P_0 U_n(t) \{ \psi(\tau_n) \dots \psi(\tau_1) \} d\tau_1 \dots d\tau_n.$$

It results from (168) and (167) that:

$$(170) \quad U_n(t) \Theta_n(0; \tau_1, \dots, \tau_n) \chi_0 = \frac{1}{\sqrt{n!}} \psi(\tau_n) \dots \psi(\tau_1) P_n \chi(t).$$

This formula is a generalization of (40). Indeed, in the case of a  $n$ -particle state  $\chi_n$

$$(171) \quad P_n \chi_n(t) = \chi_n(t),$$

and we have:

$$(172) \quad \psi(\tau_1) \dots \psi(\tau_n) \chi_n(t) = \sqrt{n!} U_n(t) \Theta_n(0; \tau_n, \dots, \tau_1) \chi_0.$$

The quantity in the right hand side being obviously a solution of the Liouville equation (17), that in the left hand side must also be a solution of the same equation. We get from (172) and (41):

$$(173) \quad \gamma_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n) = \sqrt{n!} \varepsilon^{n(n-1)/2} U_n(t) \Theta_n(0; \tau_1, \dots, \tau_n) \chi_0, \quad (\varepsilon_B = 1, \quad \varepsilon_F = -1),$$

## 6. - The rules of physical interpretation.

Let  $\chi$  be normalized:

$$(174) \quad (\chi, \chi) = |\Theta_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \int |\Theta_n(\tau_1, \dots, \tau_n)|^2 d\tau_1 \dots d\tau_n = 1.$$

We shall assume that  $\chi$  describes a state of a grand ensemble and that the probabilities are given by the following rule:

(I) The probability of finding  $n$  particles (and only  $n$ ), in the elements of volume  $d\tau$ , of the phase space of a single particle, is  $|\Theta_n(\tau_1, \dots, \tau_n)|^2 d\tau_1 \dots d\tau_n$ .

This rule is altogether similar to the corresponding one in quantum theory. We shall now see that it leads to the usual interpretation rule of the classical

statistical mechanics. Let us consider a normalized solution  $\chi(t)$  of equation (10). It follows from (161) that the function

$$(175) \quad f_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n) = |\Theta_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n)|^2$$

is a positive solution of the Liouville equation (8). Therefore the interpretation rule (I) will give the usual statistical interpretation if we take for  $\chi(t)$  the solution of (10) determined by the initial values

$$(176) \quad \Theta_n(0; \tau_1, \dots, \tau_n) = \sqrt{q_n(\tau_1, \dots, \tau_n)},$$

the  $q_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$  being the probability distribution functions of the grand ensemble in consideration at the time  $t = 0$ . The special case of an ensemble corresponds to a wave functional of the type  $\chi_n(t)$ . The choice (176) is not the most general, since we may choose arbitrarily the phases of the  $\Theta_n$  at the time  $t = 0$  without changing the probability distribution.

All the mechanical quantities which are considered in the classical statistical mechanics correspond to operators  $F_{\text{op}}$  of the type (152). It is easily seen that the average value of the quantity  $F(\tau_1, \dots, \tau_n)$  is

$$(177) \quad F(\tau_1, \dots, \tau_n) = (\chi, F_{\text{op}}\chi),$$

as a consequence of (156). In the present formalism we may introduce more general operators than those of type (152). It seems natural to assume that those more general operators may also correspond to physical quantities, when they are hermitian. One such operator is  $\mathcal{R}$ . It is clear that

$$(178) \quad v(t) = (\chi(t), \mathcal{R}\chi(t)) = \left( \chi(t), i \frac{\partial}{\partial t} \chi(t) \right),$$

is a kind of measure of the rate of variation of the state of the non stationary grand ensemble. The consideration of these more general operators requires a more elaborate notion of system, or even grand ensemble, than that of the classical statistical mechanics, since it is not enough to give the probabilities  $|\Theta_n|^2$  but the  $\Theta_n$  themselves are necessary. From now on we shall assume that the states of the grand ensembles in consideration are described by wave functionals  $\chi$ . We can now extend the interpretation rule I:

(II) The physical quantities are described by hermitian operators  $A$ . The possible values of  $A$  are its eigenvalues  $A'$ . The probability of a value  $A'$  in the state described by the normalized wave functional  $\chi$  is  $(\chi, P_{A'}\chi)$ ,  $P_{A'}$  being the projection operator of  $A$  corresponding to the eigenvalue  $A'$ .

(III) The probability of finding the values  $A'_i$  of a set of commutable operators  $A_i$  is  $(\chi, P_{A'}\chi)$ .  $P_{A'}$  being the projection operator on the linear mani-



fold of the eigenfunctionals of the set  $A_i$  corresponding to the eigenvalues  $A'_i$  and  $\chi$  the normalized wave functional of the state in consideration.

Let us apply the interpretation rule III to the operators  $N(\omega_i)$ , the  $\omega_i$  being non overlapping finite volumes of  $\Omega$  containing the corresponding points  $\tau_i$ . We shall have to consider also the operator  $P_n$ , if we want to have the probability of finding just  $n$  particles. Denoting that probability by  $p_n(\omega_1, \dots, \omega_i)$ , we have:

$$(179) \quad p_n(\omega_1, \dots, \omega_i) = \left( \chi, \int_{\omega_1} d\tau_1 \dots \int_{\omega_n} d\tau_n P(\tau_1, \dots, \tau_n) \chi \right) = \\ = \frac{1}{n!} \int_{\omega_1} d\tau_1 \int_{\omega_2} d\tau_2 \dots \int_{\omega_n} d\tau_n | \chi, \chi(\tau_1, \dots, \tau_n) |^2 = \int_{\omega_1} d\tau_1 \int_{\omega_2} d\tau_2 \dots \int_{\omega_n} d\tau_n | \Theta_n(\tau_1, \dots, \tau_n) |^2.$$

Thus we get the rule I as a particular case of the general rule III.

The average value of the operator  $A$  in the state  $\chi$  is:

$$(180) \quad \bar{A} = \sum_{A'} A' (\chi, P_{A'} \chi) = (\chi, A \chi),$$

since

$$(181) \quad \sum_{A'} A' P_{A'} = A.$$

The quantity  $v(t)$  defined by (178) will be called the state-velocity of the grand ensemble. It is the average value of  $\mathcal{R}$  at time  $t$ :

$$(182) \quad v(t) = \mathcal{R}(t).$$

Some of the general operators we are considering have also an equivalent in the theory of the Liouville equation. Thus  $\mathcal{R}$  corresponds to the Liouville operator  $L_n$  of equation (56). We get from (160):

$$(183) \quad \mathcal{R}\chi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \int \chi(\tau_1, \dots, \tau_n) L_n \Theta_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n.$$

Hence

$$(184) \quad (\chi(t), \mathcal{R}\chi(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} \int \Theta_n^*(t; \tau_1, \dots, \tau_n) L_n \Theta_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n,$$

in particular, in the case of an ensemble with a fixed number of particles  $n$ , (184) becomes:

$$(185) \quad v(t) = \int \Theta_n^*(t; \tau_1, \dots, \tau_n) L_n \Theta_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n.$$

We may consider  $\Theta_n$  as a kind of normalized wave function in the phase space of the  $n$  particle system, since in this case

$$(186) \quad \int |\Theta_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n)|^2 d\tau_1 \dots d\tau_n = 1,$$

and the quantity in the right hand side of (185) as a kind of average value of  $L_n$ .

7. — The above considerations lead us to introduce a set of interpretation rules in the phase space of a  $n$  particle system, which generalizes the ordinary rules of the classical statistical mechanics:

A) The states of a  $n$  particle system are described by wave functions  $\Theta_n$  which satisfy the Liouville equation (17).

B) The physical quantities are represented by linear hermitian operators  $\alpha$  acting on the wave functions  $\Theta$ . The possible values of the physical quantity represented by the operator  $\alpha$  are its eigenvalues  $\alpha'$ .

C) The probability of finding the values  $\alpha'_i$  of a set of commutable operators  $\alpha_i$  is  $\int \Theta_n^*(\tau_1, \dots, \tau_n) \pi_{\alpha'} \Theta_n(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n$ ,  $\pi_{\alpha'}$  being the projection operator on the linear manifold of the eigenvectors of the  $\alpha_i$  corresponding to the eigenvalues  $\alpha'_i$ , in the Hilbert space of the  $\Theta_n$ .

These interpretation rules are equivalent to the ordinary ones of the classical statistical mechanics when the only operators in consideration are of the form  $F(\tau_1, \dots, \tau_r)$ , but no more so when other operators, such as  $L_n$ , are also taken into account. It is easily seen that the average value of the quantity  $\alpha$  in the state  $\Theta_n$  is  $\langle \alpha \rangle$

$$(187) \quad \langle \alpha \rangle = \int \Theta_n^*(\tau_1, \dots, \tau_n) \alpha \Theta_n(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n,$$

with the normalization (186). In particular we have:

$$(188) \quad \langle L_n \rangle = \nu(t).$$

We shall now generalize the method, given in section 5, of relating operators in the phase space with operators in the space  $\Omega$ . We shall take as the generalization of (152) for an operator  $\alpha^{(r)}$  depending symmetrically and essentially on  $r$  particles, i.e. having no meaning when applied to a  $\Theta$  of a group of less than  $r$  particles, and corresponding to an additive physical quantity, the following relation:

$$(189) \quad A_{\alpha^{(r)}} = \frac{1}{r!} \int \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_r) \alpha^{(r)} \{ \psi(\tau_r) \dots \psi(\tau_1) \} d\tau_1 \dots d\tau_r.$$

By using the integration kernel  $K_{\alpha(r)}$

$$(190) \quad K_{\alpha(r)}(\tau_1, \dots, \tau_r; \tau'_1, \dots, \tau'_r) = \alpha^{(r)} \{ \delta(\tau_1 - \tau'_1) \dots \delta(\tau_r - \tau'_r) \},$$

and the generalized density operator  $\varrho_r(\tau_1, \dots, \tau_r; \tau'_1, \dots, \tau'_r)$

$$(191) \quad \varrho_r(\tau_1, \dots, \tau_r; \tau'_1, \dots, \tau'_r) = \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_r) \psi(\tau'_r) \dots \psi(\tau'_1),$$

we may write:

$$(192) \quad A_{\alpha(r)} = \frac{1}{r!} \int K_{\alpha(r)}(\tau_1, \dots, \tau_r; \tau'_1, \dots, \tau'_r) \varrho_r(\tau_1, \dots, \tau_r; \tau'_1, \dots, \tau'_r) \prod d\tau d\tau'.$$

We shall also need to consider generalized projection operators  $P(\tau_1, \dots, \tau_n; \tau'_1, \dots, \tau'_n)$ :

$$(193) \quad P(\tau_1, \dots, \tau_r; \tau'_1, \dots, \tau'_r) \chi = \frac{1}{r!} (\chi(\tau'_1, \dots, \tau'_r), \chi) \chi(\tau_1, \dots, \tau_r),$$

$$(194) \quad P(\tau_1, \dots, \tau_r; \tau'_1, \dots, \tau'_r) = \frac{1}{r!} \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_r) P_0 \psi(\tau'_r) \dots \psi(\tau'_1).$$

We have:

$$\begin{aligned} (195) \quad & \sum_n \frac{n!}{r(n-r)!} \int P(\tau_1, \dots, \tau_n; \tau'_1, \dots, \tau'_n) \delta(\tau_{r+1} - \tau'_{r+1}) \dots \\ & \cdot \delta(\tau_n - \tau'_n) d\tau_{r+1} \dots d\tau_n d\tau'_{r+1} \dots d\tau'_n = \\ & = \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_r) \sum_{n=r}^{\infty} \frac{1}{(n-r)!} \int \psi^*(\tau_{r+1}) \dots \psi^*(\tau_n) P_0 \psi(\tau_n) \dots \psi(\tau_{r+1}) d\tau_{r+1} \dots \\ & \cdot \psi(\tau'_r) \dots \psi(\tau'_1) = \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_r) \sum_{m=0}^{\infty} \int P(\tau''_1, \dots, \tau''_m) d\tau''_1 \dots d\tau''_m \cdot \\ & \cdot \psi(\tau'_r) \dots \psi(\tau'_1) = \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_r) \psi(\tau'_r) \dots \psi(\tau'_1). \end{aligned}$$

Hence

$$(196) \quad \varrho_r(\tau_1, \dots, \tau_r; \tau'_1, \dots, \tau'_r) = \sum_n \frac{n!}{r(n-r)!} \int P(\tau_1, \dots, \tau_n; \tau'_1, \dots, \tau'_n) \delta(\tau_{r+1} - \tau'_{r+1}) \dots \delta(\tau_n - \tau'_n) \prod_{i=1}^n d\tau_i d\tau'_i,$$

so that the generalization of (153) is:

$$(197) \quad A_{\alpha(r)} = \sum_{n=r}^{\infty} \binom{n}{r} \int K_{\alpha(r)}(\tau_1, \dots, \tau_r; \tau'_1, \dots, \tau'_r) P(\tau_1, \dots, \tau_n; \tau'_1, \dots, \tau'_n) \cdot \delta(\tau_{r+1} - \tau'_{r+1}) \dots \delta(\tau_n - \tau'_n) d\tau_1 \dots d\tau_n d\tau'_1 \dots d\tau'_n.$$

It follows from (197) that:

$$(198) \quad A_{\alpha^{(r)}} A_{\beta^{(s)}} = \sum_{n \geq r, s}^{\infty} \binom{n}{r} \binom{n}{s} \int K_{\alpha^{(r)}}(\tau_1, \dots, \tau_r; \tau'_1, \dots, \tau'_r) K_{\beta^{(s)}}(\tau''_1, \dots, \tau''_s; \tau'''_1, \dots, \tau'''_s) \cdot \\ \cdot \delta^{(n)}(\tau', \tau'') P(\tau_1, \dots, \tau_n; \tau'''_1, \dots, \tau'''_n) \delta(\tau_{r+1} - \tau'_{r+1}) \dots \delta(\tau_n - \tau'_n) \cdot \\ \cdot \delta(\tau''_{s+1} - \tau'''_{s+1}) \dots \delta(\tau''_n - \tau'''_n) d\tau_1 \dots d\tau_n d\tau'_1 \dots d\tau'_n d\tau''_1 \dots d\tau'''_1 \dots d\tau'''_n.$$

It is easily seen that equation (198) can be written as follows:

$$(199) \quad A_{\alpha^{(r)}} A_{\beta^{(s)}} = \sum_{n=p}^{\infty} \int K_{\alpha^{(r)} \beta^{(s)}}^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n; \tau'_1, \dots, \tau'_n) \cdot \\ \cdot P(\tau_1, \dots, \tau_n; \tau'_1, \dots, \tau'_n) d\tau_1 \dots d\tau_n d\tau'_1 \dots d\tau'_n,$$

$$(199a) \quad p = \frac{1}{2} (r + s + |r - s|), \quad \bar{\alpha}^{(n)} = \sum_{k_1 < k_2 < \dots < k_r} \alpha^{(r)}(\tau_{k_1} \dots \tau_{k_r}) \Theta.$$

Equation (199) shows that:

$$(200) \quad [A_{\alpha^{(r)}}, A_{\beta^{(s)}}] = 0 \quad \text{when} \quad [\alpha^{(r)}, \beta^{(s)}] = 0.$$

It is obvious that the interpretation rule  $A$  for symmetrical or anti-symmetrical  $\Theta$ 's is a consequence of those of the  $\chi$  formalism. The same will happen with the rules B and C, if we associate to each  $\alpha$  the  $r$ -particle part of the corresponding  $A_\alpha$  and to  $\Theta_r$  the wave functional  $\chi_r[\Theta_r]$ :

$$(201) \quad \chi_r[\Theta_r] = \frac{1}{\sqrt{r!}} \int \Theta_r(\tau_1, \dots, \tau_r) \chi(\tau_1, \dots, \tau_r) d\tau_1 \dots d\tau_r.$$

By introducing the spectral decomposition of  $\alpha$ ,  $\alpha = \sum_{\lambda'} \alpha' \pi_{\lambda'}$ , into (189) we get

$$A_{\alpha^{(r)}} = \sum_{\lambda'} \alpha' A_{\pi_{\lambda'}},$$

and the  $A_{\pi_{\lambda'}}$  are projection operators, as a consequence of (199):

$$(202) \quad A_{\pi_{\alpha'}}^{(r)} A_{\pi_{\alpha''}}^{(r)} = \delta_{\alpha' \alpha''} A_{\pi_{\alpha'}}^{(r)}, \quad (\pi_{\alpha'} \pi_{\alpha''} = \delta_{\alpha' \alpha''} \pi_{\alpha'}).$$

The eigenvalues of  $\alpha^{(r)}$  and  $A_{\alpha'}^{(r)}$  are therefore the same and the corresponding projection operators are related according to (189). The probability of finding

the value  $\alpha'$  of  $A_{\alpha}^{(\nu)}$  in the state  $\chi_r[\Theta_r]$  is:

$$\begin{aligned}
 (203) \quad & (\chi_r[\Theta_r], A_{\pi_{\alpha'}}^{(\nu)} \chi_r[\Theta_r]) = \\
 & = \frac{1}{r!} \int \Theta_r^*(\tau_1, \dots, \tau_r) (\chi_r(\tau_1, \dots, \tau_r), A_{\pi_{\alpha'}} \chi_r(\tau'_1, \dots, \tau'_r)) \cdot \\
 & \quad \cdot \Theta_r(\tau'_1, \dots, \tau'_r) d\tau_1 \dots d\tau_r d\tau'_1 \dots d\tau'_r.
 \end{aligned}$$

It results from (197) that:

$$(204) \quad (\chi_r(\tau_1, \dots, \tau_r), A_{\pi_{\alpha'}} \chi_r(\tau'_1, \dots, \tau'_r)) = r! K_{\pi_{\alpha'}}(\tau_1, \dots, \tau_r; \tau'_1, \dots, \tau'_r).$$

Hence

$$\begin{aligned}
 (205) \quad & (\chi_r[\Theta_r], A_{\pi_{\alpha'}}^{(\nu)} \chi_r[\Theta_r]) = \\
 & = \int \Theta_r^*(\tau_1, \dots, \tau_r) K_{\pi_{\alpha'}}(\tau_1, \dots, \tau_r; \tau'_1, \dots, \tau'_r) \Theta_r(\tau'_1, \dots, \tau'_r) d\tau_1 \dots d\tau_r d\tau'_1 \dots d\tau'_r,
 \end{aligned}$$

so that the probability of finding the value  $\alpha'$  of  $A_{\alpha}^{(\nu)}$  in the state  $\chi_r[\Theta_r]$  is the same as that of finding the value  $\alpha'$  of  $\alpha$  in the state  $\Theta_r$ . In a similar way we can see that the probability of finding the values  $\alpha'_i$  of the commutable operators  $A_{\alpha_i}^{(\nu)}$  in the state  $\chi_r[\Theta_r]$  coincides with the probability of finding the same set of values for the  $\alpha_i$  in the state  $\Theta_r$ . Thus we have proven that the interpretation rules *A*, *B* and *C* result from those of the  $\chi$  formalism, in the Bose and Fermi cases.

It is interesting to remark that the operators  $\mathcal{R}_{\text{kin}}$ , and  $\mathcal{R}_{\text{pot}}$  may be obtained from the operators  $L_{\text{kin}}^{(1)}$  and  $L_{\text{pot}}^{(2)}$ , respectively

$$(206) \quad L_{\text{kin}}^{(1)} = i \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \right)_1 = -i \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} = L_1,$$

$$(207) \quad L_{\text{pot}}^{(2)} = i \langle \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \rangle_2 = i \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + i \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}'} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'},$$

by the application of the formula (189).

The wave formalism in phase space can also be applied to the case of the Boltzmann statistics by not imposing symmetry conditions on the wave functions  $\Theta_r$ .

### 8. — The Heisenberg representation.

In the Heisenberg representation, the wave functional is time independent and the operators for the physical quantities vary with time, as in quantum mechanics. The passage from the Schrödinger representation to that of Heisenberg is given by equation (23). The equation of motion follows from (23):

$$(208) \quad i \frac{dA}{dt} = [A, \mathcal{K}].$$

The operators commutable with  $\mathcal{K}$  do not vary with time, they are the integrals of motion.  $\mathcal{K}$  is obviously an integral and  $N_{op}$  too. Other general integrals are the energy operator  $\mathcal{K}$  defined by (20) and the operators of the linear and angular momentum

$$(209) \quad \mathcal{G} = \int \psi^*(\tau) \psi(\tau) \mathbf{p} \, d\tau,$$

$$(210) \quad \mathcal{M} = \int \psi^*(\tau) \psi(\tau) \mathbf{x} \wedge \mathbf{p} \, d\tau.$$

Another important integral of the motion is the symmetry operator  $\Sigma_{op}$ :

$$(211) \quad \Sigma_{op} \chi = \Theta_0 \chi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \int \Theta_n(-\tau_1, -\tau_2, \dots, -\tau_n) \chi(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n.$$

The equation of motion (208) is not valid for the physical quantities that vary with time in the Schrödinger representation. For such quantities there is a time derivative  $(\partial A / \partial t)_s$  in the Schrödinger representation, and (208) is replaced by

$$(212) \quad i \frac{dA}{dt} = i \frac{\partial A}{\partial t} + [A, \mathcal{K}], \quad \frac{\partial A}{\partial t} = \exp[i\mathcal{K}t] \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)_s \exp[-i\mathcal{K}t].$$

The general equation for the integrals of motions is:

$$(213) \quad i \frac{\partial I}{\partial t} + [I, \mathcal{K}] = 0.$$

In (213) the operators may be taken either in the Schrödinger or the Heisen-



berg representation. The component of  $\mathcal{X}$

$$(213) \quad \mathcal{X} = \int \psi^*(\tau) \psi(\tau) \mathbf{x} d\tau,$$

are not integrals of the motion, but with  $\mathcal{X}$  and  $\mathcal{G}$  we can form the vector  $\mathcal{J}$

$$(214) \quad \mathcal{J} = \mathcal{X} - \frac{i}{m} \mathcal{G},$$

whose components are integrals of the motion.

In the phase space wave theory of section 7, the integrals of motion are defined by an equation analogous to (213):

$$(215) \quad i \frac{\partial \alpha_n}{\partial t} + [\alpha_n, L_n] = 0.$$

It is easily seen that in the case in which  $\alpha_n = F_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n)$ , (215) goes over into the Liouville equation:

$$(216) \quad \frac{\partial F_n}{\partial t} + (F_n, H_n)_n = 0.$$

Thus we see that the definition (215) generalizes the ordinary integrals of motion of the classical mechanics. Let  $\alpha^{(r)}$  be a  $r$ -particle operator which corresponds to an additive physical quantity, in the generalized sense of section 7, and is an integral of motion for systems with  $n \geq r$  particles

$$(217) \quad i \frac{\partial \bar{\alpha}^{(n)}}{\partial t} + [\bar{\alpha}^{(n)}, L_n] = 0,$$

$\bar{\alpha}^{(n)}$  being defined by (200). It is easily seen that:

$$(218) \quad A_{\frac{\partial \alpha^{(r)}}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial t} A_{\alpha^{(r)}}.$$

we get from (217), by taking into account (189) and (48)

$$(219) \quad i \frac{\partial}{\partial t} A_{\alpha^{(r)}} + [A_{\alpha^{(r)}}, \mathcal{K}] = 0.$$

This general theorem shows that  $\mathcal{X}$  and the components of  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{M}$  and  $\mathcal{J}$  are integrals of motions.

$N_{\text{op}}$  is an integral of the motion, as shown by (36). We shall now prove that all the operators  $\mathcal{Q}_r$

$$(220) \quad \mathcal{Q}_r = \int \varrho_r(\tau_1, \dots, \tau_r) d\tau_1 \dots d\tau_r,$$

are integrals of the motion. Indeed, it follows from (48) that:

$$(221) \quad [\varrho_r(\tau_1, \dots, \tau_r), \mathcal{K}] = [\psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_r), \mathcal{K}] \psi(\tau_r) \dots \psi(\tau_1) + \\ + \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_r) [\psi(\tau_r) \dots \psi(\tau_1), \mathcal{K}] = \\ = i(H_r, \varrho_r(\tau_1, \dots, \tau_r))_r + i \int \left( \sum_{n=1}^r \Phi(\mathbf{x}_{r+1} - \mathbf{x}_n), \varrho_{r+1}(\tau_1, \dots, \tau_{r+1}) \right)_{r+1} d\tau_{r+1}.$$

We get from (221), by integration:

$$(222) \quad [\mathcal{Q}_r, \mathcal{K}] = 0.$$

Therefore the  $\mathcal{Q}_r$  are integrals of motion. It follows from (221) that the equation of motion of the density operators in the Heisenberg representation is:

$$(223) \quad \frac{\partial}{\partial t} \varrho_r(t; \tau_1, \dots, \tau_r) = (H_r, \varrho_r(t; \tau_1, \dots, \tau_r))_r + \\ + \int \left( \sum_{n=1}^r \Phi(\mathbf{x}_{r+1} - \mathbf{x}_n), \varrho_{r+1}(t; \tau_1, \dots, \tau_{r+1}) \right)_{r+1} d\tau_{r+1}.$$

We get from (151):

$$(224) \quad \overline{\varrho_r(t; \tau_1, \dots, \tau_r)} = (\chi, \varrho(t; \tau_1, \dots, \tau_r) \chi) = (\chi(t), \varrho(\tau_1, \dots, \tau_r), \chi(t)) = \\ = \sum_{n=r}^{\infty} \frac{n!}{(n-r)!} \int |\Theta_n(t; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)|^2 d\tau_{r+1} \dots d\tau_n.$$

In the particular case in which  $N_{\text{op}} \chi = n \chi$ , we have

$$(225) \quad \overline{\varrho_r(t; \tau_1, \dots, \tau_r)}^{(n)} = \frac{n!}{(n-r)!} \int |\Theta_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n)|^2 d\tau_{r+1} \dots d\tau_n \quad (n \geq r),$$

so that:

$$(226) \quad \overline{\varrho_{r-1}(t; \tau_1, \dots, \tau_{r-1})}^{(n)} = \frac{1}{(n-r+1)!} \int \overline{\varrho_r(t; \tau_1, \dots, \tau_r)}^{(n)} d\tau_r.$$

The  $\varrho_r(t; \tau_1, \dots, \tau_r)^{(n)}$  are the  $r$ -particle distribution functions used by YVON<sup>(6)</sup>, BORN and GREEN<sup>(7)</sup> and KIRKWOOD<sup>(8)</sup>. By taking the average values of both sides of (223) we get a generalization of the equations of motion used by those authors:

$$(227) \quad \frac{\partial}{\partial t} \overline{\varrho_r(t; \tau_1, \dots, \tau_r)} = (H_r, \varrho_r(t; \tau_1, \dots, \tau_r))_r + \\ + \int \left( \sum_{n=1}^r \Phi(\mathbf{x}_{r+1} - \mathbf{x}_n), \varrho_{r+1}(\tau_1, \dots, \tau_{r+1}) \right)_{r+1} d\tau_{r+1}.$$

It results from (151) that

$$(228) \quad [\varrho_r(\tau_1, \dots, \tau_r), \varrho_{r'}(\tau'_1, \dots, \tau'_{r'})] = 0,$$

because the projection operators are commutable, as shown by (135) and (136). Therefore  $\partial \varrho_r / \partial t$  is commutable with all the operators involved in the right hand side of (223), so that this equation involves only commutable operators and may be treated as a  $c$ -number equation. Thus we are led again to (227) but without averaging. It is possible to replace (226) by an operator equation of general validity, since

$$(229) \quad \int \varrho_r(\tau_1, \dots, \tau_r) d\tau_r = \psi^*(\tau_1) \dots \psi^*(\tau_{r-1}) N_{\text{op}} \psi(\tau_{r-1}) \dots \psi(\tau_1) = \\ = (N_{\text{op}} - r + 1) \varrho_{r-1}(\tau_1, \dots, \tau_{r-1}).$$

By successive applications of (229) we get

$$(230) \quad \mathcal{N}_r = (N_{\text{op}} - r + 1)(N_{\text{op}} - r + 2) \dots (N_{\text{op}} - 1) N_{\text{op}} = \frac{N_{\text{op}}!}{(N_{\text{op}} - r)!},$$

with

$$(231) \quad (N_{\text{op}} - s)! = \Gamma(N_{\text{op}} - s + 1).$$

It is possible to express  $\varrho_r$  in terms of the  $\varrho$ 's of lower orders:

$$(232) \quad \varrho_r(\tau_1, \dots, \tau_r) = \varrho_{r-1}(\tau_1, \dots, \tau_{r-1}) \left( \varrho(\tau_r) - \sum_{l=1}^{r-1} \delta(\tau_l - \tau_r) \right) = \\ = \varrho_{r-2}(\tau_1, \dots, \tau_{r-2}) \left( \varrho(\tau_{r-1}) - \sum_{l'=1}^{r-2} \delta(\tau_{l'} - \tau_{r-1}) \right) \left( \varrho(\tau_r) - \sum_{l=1}^{r-1} \delta(\tau_l - \tau_r) \right) = \\ = \varrho(\tau_1) (\varrho(\tau_2) - \delta(\tau_1 - \tau_2)) (\varrho(\tau_3) - \delta(\tau_1 - \tau_3) - \delta(\tau_2 - \tau_3)) \dots \left( \varrho(\tau_r) - \sum_{l=1}^{r-1} \delta(\tau_l - \tau_r) \right).$$

Equation (232) is also valid in the Heisenberg representation

$$(233) \quad \varrho_r(t; \tau_1, \dots, \tau_r) = \varrho_{r-1}(t; \tau_1, \dots, \tau_{r-1}) \left( \varrho(t; \tau_r) - \sum_{l=1}^{r-1} \delta(\tau_l - \tau_r) \right) = \\ = \varrho(t; \tau_1) \left( \varrho(t; \tau_2) - \delta(\tau_1 - \tau_2) \right) \dots \left( \varrho(t; \tau_r) - \sum_{l=1}^{r-1} \delta(\tau_l - \tau_r) \right),$$

so that:

$$(234) \quad \overline{\varrho_r(t; \tau_1, \dots, \tau_r)} = \overline{\varrho_{r-1}(t; \tau_1, \dots, \tau_{r-1}) \left( \varrho(t; \tau_r) - \sum_{l=1}^{r-1} \delta(\tau_l - \tau_r) \right)} = \\ = \overline{\varrho(t; \tau_1) \left( \varrho(t; \tau_2) - \delta(\tau_1 - \tau_2) \right) \dots \left( \varrho(t; \tau_r) - \sum_{l=1}^{r-1} \delta(\tau_l - \tau_r) \right)}.$$

It follows from (234) that:

$$(235) \quad \overline{\varrho_2(t; \tau_1, \tau_2)} = \varrho(t; \tau_1) \varrho(t; \tau_2) - \varrho(t; \tau_1) \delta(\tau_1 - \tau_2),$$

$$(236) \quad \overline{\varrho_3(t; \tau_1, \tau_2, \tau_3)} = \\ = \overline{\varrho_2(t; \tau_1, \tau_2) \varrho(t; \tau_3) - \varrho_2(t; \tau_1, \tau_2) \{ \delta(\tau_1 - \tau_3) + \delta(\tau_2 - \tau_3) \}}.$$

In order to be able to determine the one particle probability density with (227), we must make some assumptions about  $\varrho_2(t; \tau_1, \tau_2)$ , i.e. about  $\varrho(t; \tau_1) \varrho(t; \tau_2)$ . In a similar way an assumption on  $\varrho_2(t; \tau_1, \tau_2) \varrho(t; \tau_3)$  is necessary to get the two particle probability density from (227). The ordinary assumption of kinetic gas theory is the statistical independence which leads to:

$$(237) \quad \varrho(t; \tau_1) \varrho(t; \tau_2) = \varrho(t; \tau_1) \overline{\varrho(t; \tau_2)}.$$

We shall now see that the kinetic gas theory hypothesis of the molecular chaos corresponds to a Hartree kind of approximation in the present theory, more exactly a Hartree-Fock approximation in which

$$(238) \quad \Theta_n^{(B)}(t; \tau_1, \dots, \tau_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\text{perm. } k} u_1(t; \tau_{k_1}) \dots u_n(t; \tau_{k_n}),$$

$$(239) \quad \Theta_n^{(F)}(t; \tau_1, \dots, \tau_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \begin{vmatrix} u_1(t; \tau_1) & u_1(t; \tau_2) & \dots & u_1(t; \tau_n) \\ u_2(t; \tau_1) & u_2(t; \tau_2) & \dots & u_2(t; \tau_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n(t; \tau_1) & u_n(t; \tau_2) & \dots & u_n(t; \tau_n) \end{vmatrix}.$$

the  $u$  being normalized orthogonal functions:

$$(240) \quad \int u_r^*(t; \tau) u_s(t; \tau) d\tau = \delta_{rs}.$$

We get from (225), in the Hartree-Fock approximation:

$$(241) \quad \overline{\varrho(t; \tau)}^{(n)} = \sum_{i=1}^n |u_i(t; \tau)|^2,$$

$$(242) \quad \varrho_2(t; \tau_1, \tau_2)^{(n)} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq i'} \sum_{l=1}^n |u_i(t; \tau_1) u_{i'}(t; \tau_2) + \varepsilon u_{i'}(t; \tau_1) u_i(t; \tau_2)|^2,$$

$$(243) \quad \varepsilon_B = 1, \quad \varepsilon_F = -1.$$

The cross terms in (242) correspond to exchange effects. In order to get a clearer understanding of the situation let us consider the case of the Boltzmann statistics, in which the Hartree-Fock approximation is replaced by a Hartree one:

$$(244) \quad \Theta_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n) = u_1(t; \tau_1) u_2(t; \tau_2) \dots u_n(t; \tau_n).$$

In the Boltzmann case equation (227) is still true, provided we replace  $\overline{\varrho(t; \tau_1, \dots, \tau_n)}^{(n)}$  by the  $r$ -particle probability density  $f_r^{(n)}(t; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r)$

$$(245) \quad f_r^{(n)}(t; \tau_1, \dots, \tau_r) = \frac{1}{(n-r)!} \int f_n^{(n)}(t; \tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_{r+1} \dots d\tau_n,$$

with:

$$(246) \quad f_n^{(n)}(t; \tau_1, \dots, \tau_n) = \sum_{\text{perm. } k} |\Theta_n(t; \tau_{k_1}, \dots, \tau_{k_n})|^2 = \sum_{\text{perm. } k} |u_1(t; \tau_{k_1})|^2 \dots |u_n(t; \tau_{k_n})|^2$$

Thus we get

$$(247) \quad f_1^{(n)}(t; \tau) = \sum_{i=1}^n |u_i(t; \tau)|^2, \quad f_2^{(n)}(t; \tau_1, \tau_2) = \sum_{i=1}^n \sum_{i' \neq i} |u_i(t; \tau_1)|^2 |u_{i'}(t; \tau_2)|^2,$$

so that

$$(248) \quad f_2^{(n)}(t; \tau_1, \tau_2) = f_1^{(n)}(\tau_1) f_1^{(n)}(\tau_2) - \sum_{i=1}^n |u_i(t; \tau_1)|^2 |u_i(t; \tau_2)|^2,$$

and for large values of  $n$ :

$$(249) \quad f_2^{(n)}(t; \tau_1, \tau_2) \cong f_1^{(n)}(t; \tau_1) f_1^{(n)}(t; \tau_2).$$

The above result shows that, in the case of the Boltzmann statistics, the hypothesis of molecular chaos follows from the Hartree approximation. The Hartree-Fock approximation allows us to extend the molecular chaos hypothesis to the case of indistinguishable particles. It is easily seen that

$$(250) \quad f_3^{(n)}(t; \tau_1, \tau_2, \tau_3) = f_2^{(n)}(t; \tau_1, \tau_2) f_1^{(n)}(t; \tau_3) - \\ - \sum_{l' \neq l} \sum_{l=1}^n |u_l(t; \tau_1)|^2 |u_{l'}(t; \tau_2)|^2 \{ |u_l(t; \tau_3)|^2 + |u_{l'}(t; \tau_3)|^2 \}.$$

For large values of  $n$  we may neglect the last group of terms in (250):

$$f_3^{(n)}(t; \tau_1, \tau_2, \tau_3) \cong f_2^{(n)}(t; \tau_1, \tau_2) f_1^{(n)}(t; \tau_3) \cong f_1^{(n)}(t; \tau_1) f_1^{(n)}(t; \tau_2) f_1^{(n)}(t; \tau_3).$$

This expression of  $f_3^{(n)}$  is unsatisfactory for the determination of  $f_2^{(n)}$  by means of (227).

## 9. - Variational principles.

The equation of motion (10) can be derived from a variational principle:

$$(251) \quad \delta \int_{t_0}^t \left( \chi(t), \left\{ i \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{K} \right\} \chi(t) \right) dt = 0.$$

There is also a variational principle for the wave equation in phase space:

$$(252) \quad \delta \int_{t_0}^t dt \int \Theta_n^*(t; \tau_1, \dots, \tau_n) \left\{ i \frac{\partial}{\partial t} - L_n \right\} \Theta_n(t; \tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n = 0.$$

It is easily seen that, in the case of the Bose and Fermi statistics, (252) is a consequence of (251).

The variational principles may be used to get approximations, as in quantum mechanics. Thus, by taking a  $\Theta_n$  of the form (244) and imposing only the normalization of the  $u_i$

$$(253) \quad \int u_i^*(t; \tau) u_i(t; \tau) d\tau = 1,$$

we get from (252) the equations

$$(254) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} - \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, u_i(t; \tau) \right)_1 + \sum_{l' \neq l} \int (\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), u_{l'}(t; \tau') u_l(t; \tau))_2 u_{l'}(t; \tau') d\tau' + \\ + \lambda_i(t) u_i(t; \tau) - u_i(t; \tau) \sum_{l' \neq l} \int d\tau' u_{l'}^*(t; \tau') \left\{ \frac{\partial u_{l'}}{\partial t} - \left( \frac{\mathbf{p}'^2}{2m}, u_{l'} \right)_1 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_{l'' \neq l, l'} \int u_{l''}^*(t; \tau'') (\Phi(\mathbf{x}' - \mathbf{x}''), u_{l'} u_{l'})_2 d\tau'' \right\},$$



the  $\lambda_i(t)$  being simply related to the Lagrange multipliers corresponding to the conditions (253). Since

$$(255) \quad \frac{\partial}{\partial t} |u_i(t; \tau)|^2 = \left( \frac{\mathbf{P}^2}{2m}, |u_i(t; \tau)|^2 \right)_1 + \\ + \sum_{i' \neq i} \int (\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), |u_i(t; \tau)|^2 |u_{i'}(t; \tau')|^2)_2 d\tau' + 2\lambda_i(t) |u_i(t; \tau)|^2,$$

we have

$$(256) \quad \lambda_i(t) = 0.$$

We get from (255), (256) and the first equation (247)

$$(257) \quad \frac{\partial}{\partial t} f_1^{(n)}(t; \tau) = \left( \frac{\mathbf{P}^2}{2m}, f_1^{(n)}(t; \tau) \right)_1 + \int (\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), f_1^{(n)}(t; \tau) f_1^{(n)}(t; \tau'))_2 d\tau' - \\ - \sum_{i'} \int (\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), |u_i(t; \tau)|^2 |u_{i'}(t; \tau')|^2)_2 d\tau'.$$

The last group of terms in the right hand side cancels the self-force. Neglecting this correction we get an equation involving only  $f_1^{(n)}$

$$(258) \quad \frac{\partial}{\partial t} f_1^{(n)}(t; \tau) = \left( \frac{\mathbf{P}^2}{2m}, f_1^{(n)}(t; \tau) \right)_1 + \left( \int \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}') f_1^{(n)}(t; \tau') d\tau', f_1^{(n)}(t; \tau) \right),$$

which describes the motion of a particle in an averaged field of force.

We shall now obtain some conservation principles from (252). The phase space integral in (252) is invariant for space translations. A translation  $\delta \mathbf{x}$  (infinitesimal) of all the particles transforms  $\Theta_n$  into  $\Theta_n + \sum_{i=1}^n (\delta \Theta_n / \delta \mathbf{x}_i) \cdot \delta \mathbf{x}_i$ ; since the integral in (252) remains unchanged, we get

$$(259) \quad \int \Theta_n^*(t) \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \Theta_n(t) d\tau_1 \dots d\tau_n = \int \Theta_n^*(t_0) \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \Theta_n(t_0) d\tau_1 \dots d\tau_n = \text{const.},$$

by taking into account the Liouville equation. The average value of the operator  $\sum \partial / \partial \mathbf{x}_i$  is therefore time independent. It is easily seen that  $\sum_{i=1}^n \partial / \partial \mathbf{x}_i$  is an integral:

$$(260) \quad \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i}, L_n \right] = 0.$$

In a similar way we get

$$\frac{d}{dt} \int \Theta_n^*(t) \sum_{l=1}^n \left( x_l^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_l^{(2)}} - x_l^{(2)} \frac{\partial}{\partial x_l^{(1)}} + p_l^{(1)} \frac{\partial}{\partial p_l^{(2)}} - p_l^{(2)} \frac{\partial}{\partial p_l^{(1)}} \right) \Theta_n(t) d\tau_1 \dots d\tau_n = 0,$$

by giving an infinitesimal rotation to all the position and momentum vectors around the  $x^{(3)}$  axis. The operator  $\sum_{l=1}^n (\mathbf{x}_l \wedge \partial/\partial \mathbf{x}_l + \mathbf{p}_l \wedge \partial/\partial \mathbf{p}_l)$  is also an integral of the motion:

$$(261) \quad \left[ \sum_{l=1}^n \left( \mathbf{x}_l \wedge \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_l} + \mathbf{p}_l \wedge \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_l} \right), L_n \right] = 0.$$

The operator  $\sum_{l=1}^n \partial/\partial \mathbf{x}_l$  has a striking similarity with the operator of total linear momentum in quantum theory. It is also closely related with the total momentum of the system in classical theory, since:

$$(262) \quad \sum_{l=1}^n \frac{\partial \Theta_n}{\partial \mathbf{x}_l} = \left( \Theta_n, \sum_{r=1}^n \mathbf{p}_r \right)_n.$$

In a similar way we get:

$$(263) \quad \sum_{l=1}^n \left\{ \mathbf{x}_l \wedge \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_l} + \mathbf{p}_l \wedge \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_l} \right\} \Theta_n = \left( \Theta_n, \sum_{l=1}^n \mathbf{x}_l \wedge \mathbf{p}_l \right)_n.$$

More generally, to any integral  $F(t; \tau_1, \dots, \tau_n)$  we can attach an operator  $\mathcal{F}(t)$ :

$$(264) \quad \mathcal{F}(t) \Theta_n = -i(\Theta_n, F(t; \tau_1, \dots, \tau_n))_n.$$

We have

$$(265) \quad \begin{aligned} [\mathcal{F}(t), L_n] \Theta_n &= (H_n, \Theta_n)_n (F)_n - (H_n, (\Theta_n, F)_n)_n \\ &= (\Theta_n, (F, H_n)_n)_n = - \left( \Theta_n, \frac{\partial F}{\partial t} \right)_n = -i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \Theta_n, \end{aligned}$$

because  $F$  satisfies (216). Therefore  $\mathcal{F}$  satisfies (215)

$$(266) \quad i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + [\mathcal{F}, L_n] = 0,$$

and is an integral. It results from the above results that  $L_n$  is the  $\mathcal{F}$ -integral attached to the energy  $H_n$ . The integral  $L_n$  can be easily obtained from (252) by the consideration of an infinitesimal time displacement.  $\mathcal{F}$  is essentially the infinitesimal contact transformation determined by  $F$ .

### 10. - Expansions in eigenfunctions of $L_1$ .

The eigenfunctions of  $L_1$  are the analogue of the wave functions of free-particles in quantum mechanics. We want to find the solutions of the equation:

$$(267) \quad L_1 \Theta = i \left( \frac{\mathbf{P}^2}{2m}, \Theta \right)_1 = \nu \Theta.$$

It is well known that the general solution of the equation

$$(268) \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \left( \frac{\mathbf{P}^2}{2m}, F \right)_1,$$

can be obtained by taking an arbitrary function of six independent integrals of the motion of a free particle. We can take the three components of the momentum  $\mathbf{p}$ , two components of the angular momentum  $\mathbf{M}$  and the time dependent integral

$$(269) \quad \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}}{2E_p} - t, \quad E_p = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}.$$

Therefore the general solution of (268) is

$$(270) \quad F(t; \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \Psi \left( \mathbf{p}, \mathbf{M}, \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{2E_p} - t \right),$$

$\Psi$  denoting an arbitrary function. The general solution of (267) is obviously the most general solution of (268) such that

$$(271) \quad i \frac{\partial F}{\partial t} = \nu F,$$

i.e. we have

$$(272) \quad \Theta = \Phi(\mathbf{p}, \mathbf{M}) \exp \left[ i \nu \left( \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{2E_p} - t \right) \right],$$

$\Phi$  denoting an arbitrary function.

A complete system of orthogonal and normalized eigenfunctions of  $L_1$  is

the following

$$(273) \quad \Theta(\tau; \mathbf{p}_0, \boldsymbol{\gamma}) = \left( \frac{2\pi}{u_0} \right)^{-3/2} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \exp \left[ i \boldsymbol{\gamma} \cdot \left\{ \frac{\mathbf{p}}{p} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) - \mathbf{M} \right\} \right],$$

$$(274) \quad u_0 = |\mathbf{u}_0| = \left| \frac{\mathbf{p}_0}{2E_{p_0}} \right|, \quad v = \frac{\mathbf{p}_0}{p_0} \cdot \boldsymbol{\gamma},$$

$\mathbf{p}_0$  and  $\boldsymbol{\gamma}$  being two arbitrary constant vectors.  $\Theta(\tau; \mathbf{p}_0, \boldsymbol{\gamma})$  corresponds to a well defined linear momentum  $\mathbf{p}_0$ . Since

$$(275) \quad -\frac{\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{M}_{p_0}}{2E_{p_0}} = \mathbf{x} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \wedge \mathbf{u}_0) \quad (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}_0)(\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{x}) = |\mathbf{u}_0|^{-1} (\mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\gamma})(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{x}),$$

we may write:

$$(276) \quad \Theta(\tau; \mathbf{p}_0, \boldsymbol{\gamma}) = \left( \frac{2\pi}{u_0} \right)^{-3/2} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \exp \left[ i \mathbf{x} \cdot \left\{ (\boldsymbol{\gamma} \wedge \mathbf{u}_0) + \frac{\mathbf{u}_0}{u_0} (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{u}_0) \right\} \right].$$

Hence

$$(277) \quad \int \Theta^*(\tau; \mathbf{p}_0, \boldsymbol{\gamma}) \Theta(\tau; \mathbf{p}'_0, \boldsymbol{\gamma}') d\tau = \\ = u_0^3 \delta(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}'_0) \delta \left( (\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}') \wedge \mathbf{u}_0 + \frac{\mathbf{u}_0}{u_0} ((\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}') \cdot \mathbf{u}_0) \right) = \delta(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}'_0) \delta(\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}'),$$

so that the  $\Theta^*(\tau; \mathbf{p}_0, \boldsymbol{\gamma})$  are orthogonal and normalized. They are a complete set because:

$$(278) \quad \int \Theta(\tau; \mathbf{p}_0, \boldsymbol{\gamma}) \Theta(\tau'; \mathbf{p}_0, \boldsymbol{\gamma}) d\mathbf{p}_0 d\boldsymbol{\gamma} = \left( \frac{2\pi}{u} \right)^{-3} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \cdot \\ \cdot \int \exp \left[ -i(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \left\{ \boldsymbol{\gamma} \wedge \mathbf{u} + \frac{\mathbf{u}}{u} (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{u}) \right\} \right] d\boldsymbol{\gamma} = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

We shall now expand  $\psi(\tau)$ :

$$(279) \quad \psi(\tau) = \int a(\mathbf{p}_0, \boldsymbol{\gamma}) \Theta(\tau; \mathbf{p}_0, \boldsymbol{\gamma}) d\mathbf{p}_0 d\boldsymbol{\gamma}.$$

The commutation rules for the  $a$  and  $a^*$  are:

$$(280) \quad [a(\mathbf{p}_0, \boldsymbol{\gamma}), a^*(\mathbf{p}'_0, \boldsymbol{\gamma}')]_{\pm} = \delta(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}'_0) \delta(\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}').$$

We can diagonalize  $\mathcal{K}_{\text{kin}}$ :

$$\begin{aligned}
 (281) \quad \mathcal{K}_{\text{kin}} &= \int d\tau \int a^*(\mathbf{p}_0, \gamma) \Theta^*(\tau; \mathbf{p}_0, \gamma) a(\mathbf{p}'_0, \gamma') L_1 \Theta(\tau; \mathbf{p}'_0, \gamma') d\mathbf{p}_0 d\gamma d\mathbf{p}'_0 d\gamma' = \\
 &= \int a^*(\mathbf{p}_0, \gamma) a(\mathbf{p}'_0, \gamma') \left( \frac{\mathbf{p}'_0}{p'_0} \cdot \boldsymbol{\gamma}' \right) d\mathbf{p}_0 d\gamma d\mathbf{p}'_0 d\gamma' \int \Theta^*(\tau; \mathbf{p}_0, \gamma') \Theta(\tau; \mathbf{p}'_0, \gamma') d\tau = \\
 &= \int a^*(\mathbf{p}_0, \gamma) a(\mathbf{p}_0, \gamma) \left( \frac{\mathbf{p}_0}{p_0} \cdot \boldsymbol{\gamma} \right) d\mathbf{p}_0 d\gamma.
 \end{aligned}$$

We shall now pass to the more complicated case of particles moving in a spherically symmetrical field of force of potential  $V(r)$ :

$$(282) \quad H_1 = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + V(r).$$

Instead of (268) we have now:

$$(283) \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \left( \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + V(r), F \right)_1.$$

The general solution of (284) is an arbitrary function of six independent integrals of the motion of a particle in the field of potential  $V(r)$ . We have the energy  $H_1$ , the three components of the angular momentum  $\mathbf{M}$  and the two integrals  $I_1$  and  $I_2$  obtained in the solution of the equations of motion of the particle:

$$(284) \quad I_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^r \frac{M dr}{\pm r^2 \sqrt{H_1 - V(r) - \frac{M^2}{2mr^2}}} - \varphi = M \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 p_r} - \varphi,$$

( $\varphi$  is the azimuthal angle around  $\mathbf{M}$ .  $p_r$  denotes the radial component of the momentum).

$$(285) \quad I_2 = \left[ \frac{m}{2} \int_{r_0}^r \frac{dr}{H_1 - V(r) - \frac{M^2}{2mr^2}} - t = I'_2 \quad t = m \int_{r_0}^r \frac{dr}{p_r} - t \right].$$

The integrations must be performed with  $M$  and  $H_1$  constant. The general solution of (823) is:

$$(286) \quad F = \Psi(H_1, \mathbf{M}, I_1, I'_2 - t),$$

$\Psi$  denoting an arbitrary function. The general form of the eigenfunctions

of  $L_1$  is

$$(287) \quad \Theta = \Phi(H_1, \mathbf{M}, I_1) \exp(ivI_2'),$$

$\Phi$  being an arbitrary function. There are now complications resulting from the non uniform integrals  $I_1$  and  $I_2$ , especially in the case of an attractive potential. The similarity with the situation found in the application of the Wentzel-Brillouin-Kramers method is striking. It is interesting to remark that the regions of phase space in which  $p_r$  is imaginary must not be excluded because complex values are allowed. We shall examine in detail the problems related to the non uniform integrals in a following paper, in connection with the passage to quantum theory.

I thank Professors GEHÉNAU and PRIGOGINE for their interest in this work.

#### RIASSUNTO (\*)

Si applicano all'equazione di Liouville della meccanica statistica classica metodi simili a quelli della seconda quantizzazione. Si dà un'equazione simile all'equazione di Schrödinger di un campo quantizzato. Si dimostra che le regole d'interpretazione del tipo quantico del formalismo del campo conducono, trattando le particelle come indistinguibili, alle regole della meccanica statistica classica. L'applicazione del metodo di seconda quantizzazione di Fock conduce all'introduzione di funzioni d'onda nello spazio delle fasi, la densità di probabilità della meccanica statistica classica essendo il quadrato del valore assoluto della funzione d'onda nello spazio delle fasi. La scelta del segno nelle regole di commutazione degli operatori del campo conduce a funzioni d'onda simmetriche o antisimmetriche nello spazio delle fasi. Ad ogni specie di simmetria corrisponde una differente statistica, di Bose o di Fermi, come nella teoria quantistica. La statistica di Boltzmann corrisponde a funzioni d'onda nello spazio delle fasi prive di condizioni di simmetria. I funzionali d'onda per gli stati con zero particelle dei campi nello spazio delle fasi sono analoghi a quelli dei campi quantizzati della teoria quantistica.

(\*) Traduzione a cura della Redazione.



## Il meccanismo della scarica nei contatori ad argon.

L. COLLI e U. FACCHINI

*Laboratori CISE - Milano*

(ricevuto il 7 Ottobre 1952)

**Riassunto.** — Sono studiate le curve di moltiplicazione e le forme degli impulsi in un contatore riempito con argon puro e con argon + anidride carbonica a pressioni da 150 a 1000 mm Hg. La forma degli impulsi in argon nella alta zona proporzionale è spiegata assumendo una produzione di fotoni nella valanga di Townsend, abbastanza energetici da estrarre elettroni dal catodo. Questi fotoelettroni sono prodotti in un tempo  $T_f$  dell'ordine di pochi  $\mu$ s a 150 mm Hg e più piccolo alle pressioni più alte. Lo studio delle proprietà dei livelli eccitati dell'atomo di argon permette di attribuire i fotoni in questione ai primi quattro livelli. Questi fotoni sono prodotti in collisioni che portano alla distruzione di questi livelli e non sono fotoni di risonanza. I valori di  $T_f$  sono in accordo con quelli ottenuti estrapolando i risultati di Molnar, alle pressioni da noi usate. Il processo fotoelettrico è praticamente il responsabile dell'accensione della corrente di corona che si ha a moltiplicazioni dell'ordine di 200. Nello studio delle miscele A-CO<sub>2</sub> si osserva un aumento del valore delle moltiplicazioni alla soglia di divergenza del processo fotoelettrico; questo aumento è lineare con la concentrazione di CO<sub>2</sub>. Un comportamento di questo tipo si può spiegare assumendo lo spegnimento dei livelli eccitati dell'argon per urto di seconda specie contro le molecole di CO<sub>2</sub>; dai risultati sperimentali è ottenuto per la sezione d'urto di questo processo il valore di  $\sim 600 \cdot 10^{-16}$  cm<sup>2</sup> che è da ritenersi pertanto solo un ordine di grandezza. Ulteriori studi concernono l'effetto di carica spaziale che permette la formazione di una breve zona Geiger alla soglia di divergenza del processo fotoelettrico quando la concentrazione di CO<sub>2</sub> è  $> 5 \cdot 10^{-4}$ . Nessun altro processo è stato rilevato oltre quello fotoelettrico nelle miscele A-CO<sub>2</sub> fino a concentrazioni di CO<sub>2</sub> di  $5 \cdot 10^{-3}$ . Sono descritti infine i comportamenti del contatore riempito con argon + 1% CO<sub>2</sub>; argon + 10% CO<sub>2</sub> e con argon contaminato con vapori di mercurio a pressione parziale corrispondente alla temperatura ambiente.

## 1. - Introduzione.

Lo scopo di questo lavoro è indagare sui processi elementari interessati nel funzionamento dei contatori Geiger e sul meccanismo della formazione dell'impulso nella zona Geiger, in contatori contenenti argon di elevata purezza e miscele argon-anidride carbonica in concentrazioni da  $10^{-4}$  a  $10^{-1}$ .

Molte ricerche sono state condotte per costruire una teoria che renda conto del funzionamento dei contatori e delle loro proprietà <sup>(1)</sup> <sup>(2)</sup>. Queste ricerche hanno messo in chiaro i seguenti punti fondamentali:

1) La formazione dell'impulso è determinata da un processo primario di ionizzazione a valanga nella zona vicina al filo (valanga di Townsend) e da processi di ionizzazione secondaria nel gas e al catodo per mezzo dei quali la scarica si spande lungo tutto il filo.

2) Nel caso di miscele di argon e di un vapore organico le esperienze di STEVER <sup>(3)</sup> e di altri <sup>(4)</sup> <sup>(5)</sup> hanno mostrato che la propagazione della scarica avviene in una ristretta zona lungo il filo del contatore.

Questo dimostra che il processo responsabile dello spandersi produce una ionizzazione secondaria nel gas, vicino al filo.

3) Nel caso di riempimenti con solo argon, idrogeno, ecc., le stesse esperienze di STEVER <sup>(3)</sup> hanno messo in evidenza che lo spandersi della scarica avviene in tutto il contatore, non localizzato sul filo.

GREINER <sup>(6)</sup> ha dimostrato che il processo agente nell'idrogeno è dovuto a fotoni generati nella valanga di Townsend.

KORFF e ROSE <sup>(7)</sup> e NAWIJN e coll. <sup>(8)</sup> hanno mostrato che nella formazione dell'impulso era interessato il catodo: l'interpretazione dei loro risultati è stata fatta per mezzo del processo fotoelettrico sul catodo. CURRAN e STROTHERS <sup>(9)</sup> hanno studiato l'emissione fotoelettrica del catodo causata da fotoni prodotti nella valanga e la riduzione di questa emissione dovuta ad aggiunta di vapori organici.

<sup>(1)</sup> S. C. CURRAN e J. D. CRAGGS: *Counting Tubes* (London, 1949).

<sup>(2)</sup> D. H. WILKINSON: *Ionization Chambers and Counters* (Cambridge, 1950).

<sup>(3)</sup> H. G. STEVER: *Phys. Rev.*, **61**, 38 (1942); **59**, 765 (1941).

<sup>(4)</sup> J. HILL e J. V. DUNVORTH: *Nature*, **158**, 833 (1946).

<sup>(5)</sup> E. ALDER, E. BALDINGER, P. HUBER e F. METZGER: *Helv. Phys. Acta*, **20**, 73 (1947).

<sup>(6)</sup> E. GREINER: *Zeits. Phys.*, **81**, 543 (1933).

<sup>(7)</sup> S. KORFF e M. E. ROSE: *Phys. Rev.*, **59**, 850 (1941).

<sup>(8)</sup> A. NAWIJN: *Physica*, **9**, 481 (1942); A. NAWIJN e J. DE JONG: *Physica*, **10**, 513 (1943); A. NAWIJN e D. MULDER: *Physica*, **10**, 531 (1943).

<sup>(9)</sup> S. C. CURRAN e J. E. STROTHERS: *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **35**, 654 (1939).

L'interpretazione di questi risultati presenta la difficoltà che in generale i gas usati avevano un grado di purezza non superiore al 99%, non sufficiente per ottenere riproducibilità in misure di questo tipo.

4) Contemporaneamente allo spandersi lungo il filo della scarica si ha la formazione di una carica positiva che costituisce una guaina intorno al filo.

L'effetto della carica spaziale può essere diverso in dipendenza dal meccanismo che determina lo spandersi della carica e quindi dalla miscela di gas usata.

5) Secondo la teoria di MONTGOMERY e MONTGOMERY <sup>(10)</sup>, e di KORFF e PRESENT <sup>(11)</sup> nei contatori è attivo un altro processo secondario di produzione di elettroni, il processo di estrazione dal catodo per urto di ioni che, avvenendo dopo un tempo grande in confronto alla propagazione della scarica, ha per effetto di causare impulsi secondari successivi e quindi l'accensione della corrente di corona.

Appare evidente che una teoria quantitativa del comportamento di un contatore richiede la conoscenza dei vari processi secondari di produzione di elettroni relativi alla miscela di gas di riempimento e al catodo del contatore.

Lo studio dei processi elementari interessati nelle scariche nei gas è stato condotto estesamente da parecchi autori; una rassegna di questi studi è data da PENNING e DRUYVESTEYN <sup>(12)</sup> e da LOEB <sup>(13)</sup>.

Questi lavori mettono in luce la forte dipendenza di tali processi dalle condizioni di purezza, pressione e temperatura del gas.

## 2. — Metodo di misura.

Il metodo di misura usato utilizza l'osservazione degli impulsi dati da particelle ionizzanti in un usuale contatore cilindrico.

A tensioni inferiori ad un certo valore  $V_p$  (soglia di moltiplicazione proporzionale) il contatore funziona come una camera di ionizzazione ad elettrodi cilindrici.

A tensioni superiori a  $V_p$  si ha la zona di moltiplicazione proporzionale: in questa zona un elettrone primario generato nel contatore produce una valanga di  $N$  elettroni sul filo (valanga di Townsend).  $N$  definisce il coefficiente di moltiplicazione ed è funzione crescente della tensione applicata <sup>(7)</sup>.

Ad una certa tensione il contatore entra nella zona di scarica a corona;

<sup>(10)</sup> C. G. MONTGOMERY e D. D. MONTGOMERY: *Phys. Rev.*, **57**, 1034 (1940).

<sup>(11)</sup> S. A. KORFF e R. D. PRESENT: *Phys. Rev.*, **65**, 274 (1944).

<sup>(12)</sup> M. J. DRUYVESTEYN e F. M. PENNING: *Rev. Mod. Phys.*, **12**, 87 (1940).

<sup>(13)</sup> L. LOEB: *Fundamental Processes of Electrical Discharge in Gases* (New York, 1939).

in opportune condizioni questa zona è preceduta dalla zona dei conti o zona Geiger.

Una parte della misura consiste nel rilevare le curve che danno la moltiplicazione  $N$  in funzione della tensione.

La ionizzazione primaria è ottenuta con particelle  $\alpha$  emesse da uno strato di polonio collocato nel contatore e con singoli elettroni veloci, prodotti da una sorgente di radiazioni  $\gamma$  (nel seguito indicati come impulsi  $\gamma$ ).

Data l'elevata ionizzazione totale le particelle  $\alpha$  si sono usate per rilevare le curve di moltiplicazione nella zona «camera di ionizzazione» e nella prima parte della zona proporzionale fino a moltiplicazioni di circa 50.

A moltiplicazioni più elevate, fino a circa 10 000, a causa della distorsione del coefficiente di moltiplicazione dovuta alla troppa ionizzazione data dalle  $\alpha$ , si sono usati gli impulsi  $\gamma$ , i quali corrispondono ad una ionizzazione primaria di circa 50 keV e quindi realizzano condizioni di moltiplicazione lineare sul filo.

Un'altra parte della misura è fatta studiando la forma degli impulsi di particelle  $\alpha$  e  $\gamma$  nelle varie zone e con diverse costanti di tempo nella catena elettronica, in modo da ottenere impulsi più o meno differenziati.

Dalle forme così studiate si può dedurre lo svolgimento nel tempo della scarica e da ciò informazioni sulla natura dei processi in essa interessati.

### 3. — Apparecchiatura sperimentale.

Le misure sono state condotte con diverse apparecchiature consistenti in uno o più contatori inseriti su un impianto adatto alla loro vuotatura e al loro riempimento con le miscele di gas.

L'impianto cui riferiamo la maggior parte dei dati ottenuti è illustrato nella fig. 1.

Questo è costituito da un contatore (fig. 2) inserito in un circuito metallico dove il gas vien fatto circolare a termosifone e che serve a provvedere una rapida purificazione dell'argon e un rapido miscelamento dei gas in studio.

Il diametro del contatore, di ottone, è di 60 mm, la lunghezza utile del filo di tungsteno è di 200 mm e il suo diametro di 0,2 mm. Il contatore è isolato elettricamente dal resto dell'impianto per mezzo di due tubi di vetro.

Il contatore può essere scaldato fino a 200 °C per la degassazione. Il tubo del contatore è stato degassato prima del montaggio a 600 °C per qualche ora.

Gli altri elementi del circuito sono:

1) il forno a circolazione contenente lega di calcio e magnesio al 10% che, scaldato a 400-500 °C serve alla purificazione dell'argon <sup>(14)</sup>;

<sup>(14)</sup> L. COLLI e U. FACCHINI: *Rev. Sc. Instr.*, **23**, 39 (1952); *Nuovo Cimento*, **8**, 892 (1951).

2) la camera in cui viene effettuata la misura della velocità di migrazione degli elettroni nel gas.

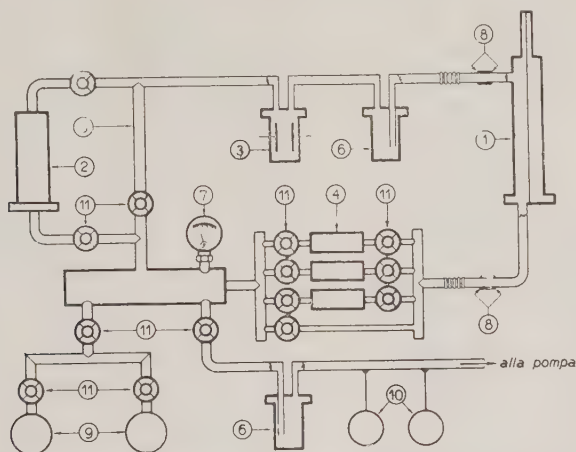


Fig. 1. Apparechiatura sperimentale: 1) contatore; 2) forno di purificazione; 3) camera di ionizzazione; 4) serbatoi; 5) colonna riscaldata; 6) trappola; 7) manometro; 8) saldature vetro metallo; 9) bombole di argon e di anidride carbonica; 10) vacuometri; 11) rubinetti.

Questa misura dà il controllo della purezza dell'argon con una sensibilità dell'ordine di qualche  $10^{-4}$  per impurezze molecolari (<sup>14</sup>);

3) la trappola che può essere raffreddata con aria liquida allo scopo di fermare eventuali impurezze condensabili;

4) il sistema di serbatoi per la miscelazione;

5) la colonna riscaldata che permette la circolazione anche escludendo il forno.

Questa operazione è necessaria per mescolare rapidamente la miscela quando contiene un gas assorbibile dal forno;

6) il manometro metallico del tipo Bourdon per pressioni da 10 a 2000 mm Hg.

Le guarnizioni per le tenute sono tutte metalliche e interamente metallici sono anche i rubinetti; è evitata la presenza di grassi e di vapori di mercurio.

Il circuito descritto viene vuotato con una pompa a diffusione ad olio di silicone. Il vuoto viene misurato con un vacuometro di Penning.

L'insieme viene vuotato per parecchi giorni a  $10^{-5}$  mm Hg, degasando il contatore e il forno.

Si è usato argon di diversa provenienza e di purezze iniziali 98 e 99.9%. In ogni caso si sono ottenuti risultati riproducibili. Per le miscele si è usata anidride carbonica di purezza 97%.

L'apparecchiatura elettronica con cui si studiano gli impulsi è illustrata nella fig. 3.

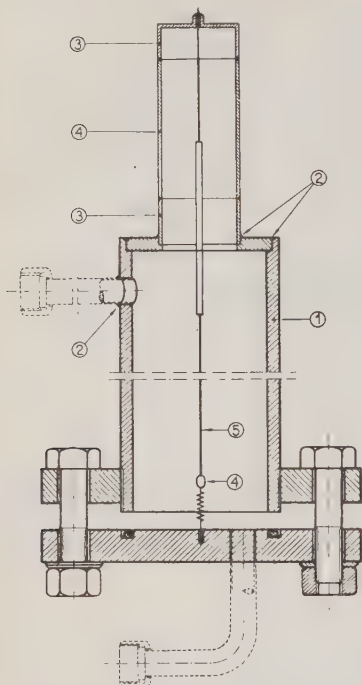


Fig. 2. - Contatore: 1) Catodo di ottone; 2) saldatura ad argento; 3) kovar; 4) vetro; 5) filo di tungsteno.

Il contatore è contenuto in una scatola metallica che fa da schermo elettrostatico. Il filo del contatore è connesso attraverso una convenzionale catena di amplificatori ad un oscillografo Dumont tipo 248 la cui traccia può essere comandata a mezzo di un sincroscopio.

Il tempo di salita della catena è di  $0,6 \mu s$ . In alcuni casi è stato utile usare una catena più rapida ( $0,2 \mu s$ ).

Le misure di ampiezza degli impulsi sono fatte usando una costante di tempo di ingresso molto maggiore dei tempi di salita degli impulsi ( $RC$  circa  $200 \mu s$ ). Fra il preamplificatore e l'amplificatore viene in questo caso inserita una linea di riflessione la quale ha l'ufficio di tagliare la discesa dell'impulso dopo un tempo variabile da  $1,2$  a  $6 \mu s$ . In tal modo si misura solo la prima salita dell'impulso che corrisponde alla collezione degli elettroni della valanga di Townsend e si esclude una componente dell'impulso ritardata nel tempo e dovuta, per esempio, ad elettroni prodotti per effetti secondari. Questo è importante per la

misura della moltiplicazione sul filo quando il contatore funziona nell'ultima parte della zona proporzionale dove questi processi secondari sono rilevanti.

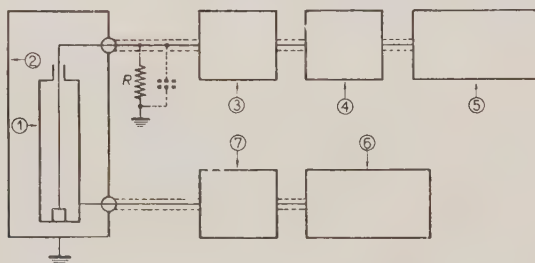


Fig. 3. - Apparecchiatura elettronica: 1) contatore; 2) schermo elettrostatico; 3) pre-amplificatore; 4) amplificatore; 5) oscillografo; 6) alta tensione; 7) filtro.



La forma dell'impulso si studia osservandone lo sviluppo nel tempo con il sincroscopio ed usando una costante di tempo d'ingresso variabile da 1 a  $200\ \mu\text{s}$  che provvede un'opportuna differenziazione degli impulsi.

La forma dell'impulso può essere osservata per una durata variabile da qualche  $\mu\text{s}$  a 30 ms usando diversi tempi di sparpagliamento della traccia dell'oscillografo.

#### 4. - Misure sull'argon.

Le curve di moltiplicazione  $N(V)$  a varie pressioni di argon sono mostrate nella fig. 4.

Durante le misure l'argon è fatto circolare nel forno di purificazione. Le misure in tali condizioni sono riproducibili nel tempo. Non si sono ottenute

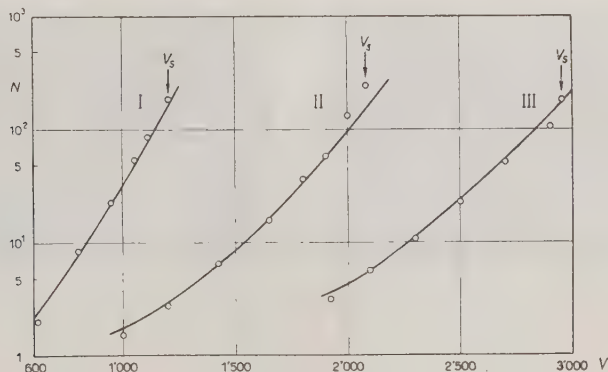


Fig. 4. - Curve di moltiplicazione per argon: I)  $p = 150\ \text{mm Hg}$ ; II)  $p = 500\ \text{mm Hg}$ ; III)  $p = 1000\ \text{mm Hg}$ .

variazioni mettendo dell'aria liquida intorno alla trappola e lasciandovela alcune ore.

Gli impulsi  $\alpha$  e  $\gamma$  osservati al sincroscopio hanno la forma usuale (fig. 5) fino a moltiplicazioni di circa 50.

A partire da queste moltiplicazioni ogni impulso, è seguito da una successione convergente di impulsi distanziati di un tempo  $T_0$  l'uno dall'altro ed avente ragione crescente con  $N$ .

Questi impulsi si mettono in evidenza con una costante di tempo dell'ordine di  $1\ \mu\text{s}$ , cioè inferiore alla loro separazione, che è dell'ordine di  $10\ \mu\text{s}$  per tutte le pressioni usate.

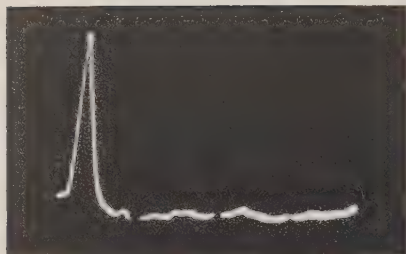


Fig. 5. - Impulso di particella  $\alpha$  nella zona proporzionale a bassa moltiplicazione. Segnali di taratura =  $10 \mu s$ ;  $RC = 1 \mu s$ .

tore si innesca la corona stabile, dopo una brevissima zona instabile ampia solo qualche volt.

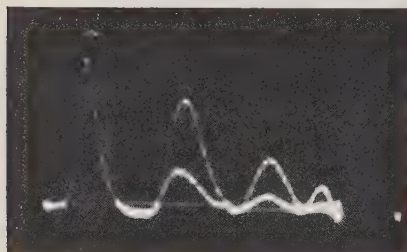


Fig. 6. - Impulsi di particelle  $\alpha$  in argon alla soglia di corona.

Pressione =  $1000 \text{ mm Hg}$ ;  $N = 210$ ; Segnali di taratura =  $1 \mu s$ ;  $RC = 1 \mu s$ .

Il tempo di salita degli impulsi successivi di una stessa successione si allunga con l'aumentare del numero d'ordine dell'impulso; di conseguenza diminuisce la nettezza della separazione fra gli impulsi.

Questo effetto diventa tanto più grande quanto più la pressione è ridotta. A pressioni di  $150 \text{ mm Hg}$  non si vede altro che il secondo impulso seguito da una discesa continua.

Raggiunto un valore della moltiplicazione dell'ordine di 200 nel contatore si innesca la corona stabile, dopo una brevissima zona instabile ampia solo qualche volt.

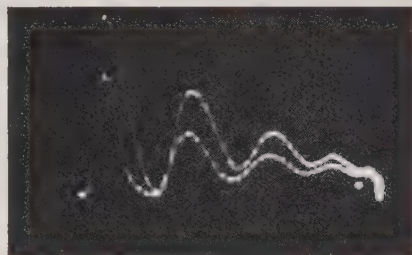


Fig. 7. - Impulsi di particelle  $\alpha$  in argon alla soglia di corona. L'allungamento del tempo di salita si osserva negli ultimi fotoimpulsi. Pressione =  $500 \text{ mm Hg}$ ;  $N = 250$ ; Segnali di taratura =  $1 \mu s$ ;  $RC = 1 \mu s$ .

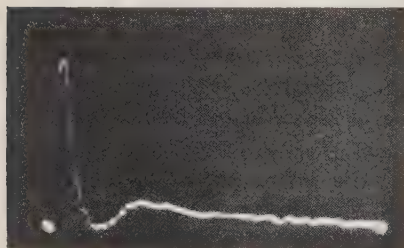


Fig. 8. - Impulsi di particella  $\alpha$  in argon alla soglia di corona.

Pressione =  $150 \text{ mm Hg}$ ;  $N = 180$ ; Segnali di taratura =  $1 \mu s$ ;  $RC = 1 \mu s$ .

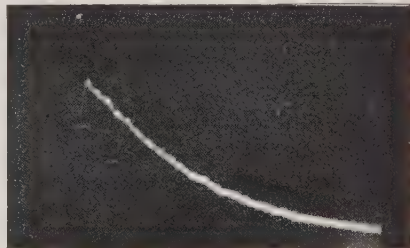


Fig. 9. - Impulso di particella  $\alpha$  in argon alla soglia di corona.

Pressione =  $150 \text{ mm Hg}$ ;  $N = 180$ ; Durata della traccia =  $100 \mu s$ ;  $RC = 10 \mu s$ .

Le forme degli impulsi alla soglia della corona sono rappresentate nelle figg. 6, 7, 8 e 9. La serie degli impulsi successivi resta sempre convergente anche nel caso di impulsi  $\gamma$ .

Risultati del tutto simili sono stati ottenuti con un altro impianto costituito da 4 contatori in parallelo con catodi di rame o di ottone e un complesso di circolazione e di purificazione del tipo di quello già descritto. Soltanto i valori di  $N$  in soglia potevano differire di un fattore 2.

## 5. - Discussione dei risultati sull'argon.

I risultati ottenuti con l'argon ed in particolare la forma degli impulsi a moltiplicazioni elevate si possono interpretare per mezzo dei fenomeni che governano la produzione e il decadimento degli atomi eccitati nella valanga di Townsend.

A) *I fotoimpulsi.* - Come è noto, un elettrone liberato nel contatore, arrivato in vicinanza del filo, dove il campo è elevato, può ionizzare per urto gli atomi di argon, dando luogo alla valanga di Townsend. Un elettrone liberato nel contatore produce un impulso contenente  $N$  elettroni, la cui ampiezza è proporzionale ad  $N$ .

Consideriamo gli atomi eccitati prodotti nella valanga; sia  $\alpha$  il rapporto fra il numero di atomi eccitati ed il numero di ionizzazioni prodotte nella valanga. Il numero di atomi eccitati per elettrone iniziale è  $N\alpha$ .

Si può assumere che i livelli eccitati abbiano una vita media che genericamente indichiamo con  $T_{\gamma_0}$  e che nei processi interessanti il loro decadimento nascano dei fotoni abbastanza energici da estrarre elettroni per effetto fotoelettrico dal catodo di ottone (soglia fotoelettrica 4-5 eV).

Indichiamo con  $\beta$  il numero di fotoni di energia sufficiente per il processo fotoelettrico che in media vengono emessi per atomo eccitato, con  $G$  la probabilità che questi fotoni arrivino al catodo senza essere distrutti; sia inoltre  $K$  l'angolo solido utile e  $\gamma$  il rendimento fotoelettrico medio del catodo per i fotoni interessati.

In un tempo dell'ordine di  $T_{\gamma_0}$  gli  $N\alpha\beta G$  fotoni producono  $N\alpha\beta GK\gamma$  fotoelettroni al catodo.

I fotoelettroni arrivano al filo dopo un tempo  $T_{\gamma_0}$  (tempo di transito nel contatore) e si moltiplicano per  $N$  dando un nuovo impulso di ampiezza  $(N\alpha\beta GK\gamma)N$  ad una distanza circa  $T_{\gamma_0} + T_{\gamma_0}$  dal primo. Questo processo si ripete e trascurando la variazione di  $N$  dovuta all'accumularsi di ioni sul filo, produce una successione di impulsi di ragione  $(N\alpha\beta GK\gamma)$  crescente con la tensione.

Alla tensione per cui

$$(1) \quad N\alpha\beta GK\gamma = 1$$

si ha, in questa approssimazione, la soglia di divergenza del processo; chiamiamo  $N_s$ , moltiplicazione di soglia, il valore di  $N$  che soddisfa la (1), e indichiamo con  $V_s$  la tensione corrispondente.

In questo modo si possono interpretare le successioni di impulsi descritte nel paragrafo 4, il loro comportamento con la tensione e l'accendersi della corona.

I singoli fotoimpulsi della successione possono osservarsi ben separati solo se il tempo  $T_{f_0}$  è molto piccolo rispetto al tempo  $T_{e_0}$ .

Se  $T_{f_0}$  non è trascurabile rispetto a  $T_{e_0}$  si ottiene ovviamente un allungamento dei tempi di salita dei fotoimpulsi successivi ed una peggiore separazione fra di essi. Se  $T_{f_0}$  poi è dell'ordine di grandezza di  $T_{e_0}$  non c'è nessuna separazione fra i fotoimpulsi.

Dall'esame delle successioni di impulsi nell'argon si può osservare che  $T_{f_0}$  non è trascurabile rispetto a  $T_{e_0}$ .

Si nota infatti un allungamento dei tempi di salita per i successivi impulsi di una stessa serie (fig. 7); questo allungamento diventa più rilevante al diminuire della pressione finché alle pressioni più basse la separazione dei fotoimpulsi non è più realizzata (fig. 8).

Questi fatti indicano che il tempo  $T_{f_0}$  cresce con il diminuire della pressione.

È interessante ottenere dall'osservazione degli impulsi una stima dei valori possibili per  $T_{f_0}$ .

Per far ciò si può misurare  $T_0$  e dedurre  $T_{f_0}$  dalla relazione approssimata  $T_{e_0} + T_{f_0} \cong T_0$ .

I valori di  $T_0$  sono ottenuti misurando la distanza fra i massimi del primo e del secondo impulso della successione, usando una  $RC$  di  $1 \mu s$  circa.

$T_{e_0}$  può essere calcolato con una certa precisione conoscendo i valori delle velocità di migrazione  $W^-$  degli elettroni <sup>(14)</sup> <sup>(15)</sup>. Abbiamo per maggior sicurezza rilevati i valori di  $W^-$  con la camera illustrata in paragrafo 3, contemporaneamente alle misure di  $T_0$ .

Per valori di  $E/p$  ( $E$  campo elettrico,  $p$  pressione) più elevati di  $1,5$  volt  $cm^{-1} mm Hg^{-1}$  abbiamo usato i valori di NIELSEN <sup>(15)</sup>.

I valori di  $T_0$ ,  $T_{e_0}$  e  $T_0 - T_{e_0} \cong T_{f_0}$  sono raccolti nella tabella I.

I valori di  $T_{f_0}$  rappresentano solo l'ordine di grandezza del tempo di permanenza dei livelli eccitati nel gas e nel caso delle pressioni più elevate sono soltanto dei limiti superiori.

L'assunzione di un tempo  $T_{f_0}$  di decadimento dell'ordine di grandezza indicata nella tabella rende conto della forma degli impulsi e come si vedrà in seguito fornisce una semplice interpretazione dei risultati nelle miscele  $A + CO_2$ .

<sup>(15)</sup> R. A. NIELSEN: *Phys. Rev.*, **50**, 950 (1936).

Una causa di allungamento dei tempi di salita negli impulsi successivi potrebbe essere dovuta ad un'azione del tempo di sviluppo della valanga elettronica ed anche ad una diffusione geometrica degli impulsi lungo il contatore. Si può ritenere che questi effetti siano trascurabili poichè in miscele di  $A + CO_2$  (vedi n. 7) si possono osservare parecchie decine di fotoimpulsi ben separati e nessun allungamento sensibile dei tempi di salita.

In queste condizioni azioni geometriche o di valanga avvengono in modo analogo a quanto accade nell'A puro e non portano un effetto sensibile.

B) *Il decadimento dei livelli eccitati.* - Ci proponiamo ora di analizzare più in dettaglio il fenomeno di decadimento dei livelli eccitati nella valanga,

Consideriamo a questo scopo lo spettro dei livelli dell'atomo di argon che è riportato nella tabella II <sup>(16)</sup> <sup>(17)</sup>.

Dei primi quattro livelli eccitati il  $^3P_1$  e  $1^1P_1$  sono livelli di risonanza e il  $^3P_2$  è  $^3P_0$  sono livelli metastabili. Tutti questi livelli, come vedremo dopo, hanno una certa durata nel gas <sup>(18)</sup>.

Dei livelli superiori solo pochi possono decadere direttamente allo stato fondamentale emettendo fotoni di 14-15 eV; la più parte decade ad uno dei primi quattro livelli con fotoni di energia inferiore a 4 eV. La vita media per queste transizioni si ritiene generalmente dell'ordine di  $10^{-7}$ - $10^{-9}$  s molto inferiore alla durata dei primi quattro livelli.

Notiamo che i fotoni emessi in queste transizioni non hanno energia sufficiente per produrre estrazione fotoelettrica dal catodo e quindi li escludiamo dalla discussione.

Si ha che per qualsiasi distribuzione iniziale dell'eccitazione, dopo un tempo corrispondente a qualche transizione radiante, sono presenti nel gas quasi esclusivamente livelli di risonanza e metastabili.

Possiamo limitarci a considerare il comportamento di questi soli livelli.

I livelli  $^3P_1$  e  $1^1P_1$  possono decadere allo stato fondamentale emettendo i fotoni di risonanza di 11,62-11,82 eV.

I fotoni di risonanza come è noto subiscono parecchie volte la cattura e la riemissione da parte degli atomi non eccitati del gas.

HOLSTEIN <sup>(19)</sup> ha sviluppato una teoria di questo processo e calcola che il fattore di imprigionamento  $1/g$  per un cilindro di qualche cm di diametro (numero di volte che in media un fotone è catturato e riemesso prima di raggiungere le pareti del cilindro) può essere dell'ordine di qualche centinaio.

<sup>(16)</sup> W. DE GROOT e F. M. PENNING: *Handb. d. Phys.*, 23/1 (1933).

<sup>(17)</sup> C. E. MOORE: *Atomic Energy Levels*, Circular NBS n. 4467 (1949).

<sup>(18)</sup> A. C. G. MITCHELL e M. W. ZEMANSKY: *Resonance Radiations and Excited Atoms* (New York, 1934).

<sup>(19)</sup> T. HOLSTEIN: *Phys. Rev.*, 72, 1212 (1947); 83, 1159 (1951).



Si può ritenere secondo questa teoria che la durata di imprigionamento sia dell'ordine di qualche  $10^{-5}$ - $10^{-4}$  s. molto più grande della vita media propria dei livelli risonanti.

HOLSTEIN ottiene inoltre che il fattore di imprigionamento è indipendente dalla pressione in una zona di pressione in cui la forma della riga di emissione sia determinata dall'allargamento di pressione. Non si conoscono misure di  $1/g$  nel caso dell'argon.

I livelli metastabili hanno una vita media propria molto lunga; il processo che porta al loro decadimento è dovuto in generale agli urti che subiscono con gli atomi non eccitati del gas.

In recenti misure MOLNAR<sup>(20)</sup> (21) e PHELPS<sup>(22)</sup> hanno studiato la durata di questi livelli a pressioni da 1 a 10 mm Hg. Questi autori ottengono vite medie dell'ordine di qualche ms e mostrano che la probabilità per secondo di distruzione nel gas di questi livelli cresce circa con il quadrato della pressione. Questa distruzione può essere attribuita secondo MOLNAR ad una sorta di urti che probabilmente conduce alla formazione di molecole eccitate instabili fra atomi metastabili ed atomi neutri.

Processi di questo tipo sono stati invocati anche da altri autori<sup>(23)</sup> per spiegare parecchi fenomeni connessi con le scariche nei gas per quanto le prove chiare della loro esistenza siano state date per ora solo nel caso del Hg<sup>(24)</sup> e dell'He<sup>(25)</sup>.

In questo processo è ragionevole pensare che possano prodursi dei fotoni abbastanza energici, i quali essendo fotoni di risonanza dell'atomo di argon arrivano al catodo senza essere assorbiti.

Una teoria adeguata del decadimento dei livelli di risonanza e metastabili non è stata finora sviluppata ed i dati sperimentali sono piuttosto scarsi; il decadimento è inoltre complicato dal fatto che possono esistere dei processi di urto in cui, a causa della piccola differenza di energia che c'è fra i livelli, dell'ordine dell'energia cinetica termica degli atomi, si possono avere delle transizioni dall'uno all'altro di essi.

Possiamo però fare le seguenti osservazioni: alle elevate pressioni il decadimento di tutti i primi livelli può essere considerato globalmente tenendo in conto le transizioni per collisione.

Si hanno le due possibilità:

1) i livelli decadono attraverso l'emissione di fotoni di risonanza che

(20) J. P. MOLNAR: *Phys. Rev.*, **83**, 933 e 940 (1951).

(21) J. P. MOLNAR: Comunicazione privata.

(22) A. V. PHELPS: *Phys. Rev.*, **82**, 567 (1951).

(23) E. W. PIKE: *Phys. Rev.*, **53**, 921 (1938).

(24) A. Q. MCCOUBREY: *Phys. Rev.*, **84**, 107 (1952).

(25) R. MEYEROTT: *Phys. Rev.*, **70**, 670 (1946).

raggiungono il catodo con una probabilità circa indipendente dalla pressione che è rappresentata da  $g \tau^*$  essendo  $\tau^*$  la vita media propria dei livelli risonanti:

2) per mezzo del processo messo in luce da MOLNAR con probabilità crescente con il quadrato della pressione.

È ragionevole ritenere che quest'ultimo processo divenga predominante alle elevate pressioni e quindi il solo a regolare il decadimento di tutti i livelli.

Ne segue che a queste pressioni i fotoni di risonanza non raggiungono praticamente il catodo e l'effetto fotoelettrico è provocato dai fotoni generati nelle collisioni del tipo descritto da MOLNAR.

In questa descrizione  $\beta$  rappresenta il numero medio di fotoni «energetici» emessi in questo processo,  $\gamma$  il loro rendimento medio al catodo;  $G$  nell'argon si può ritenere 1.

Abbiamo, in queste considerazioni, estrapolato i risultati di MOLNAR ottenendo i valori  $(T_{f_0})_M$  elencati nella tab. I che sono in accordo con i nostri ordini di grandezza.

TABELLA I. — Valori del tempo di decadimento  $T_{f_0}$  in argon.

Pressione (mm Hg)	$V_s$ volt	$T_0$ ( $\mu s$ )	$T_{e_0}$ ( $\mu s$ )	$T_{f_0} = T_0 - T_{e_0}$ ( $\mu s$ )	$(T_{f_0})_M$ ( $\mu s$ )
150	1200	$10,8 \pm 1$	$6,3 \pm 1$	$4,5 \pm 2$	4,1
300	1640	$10,7 \pm 1$	$7,1 \pm 1$	$3,6 \pm 2$	1,1
500	2070	$10,2 \pm 1$	$7,7 \pm 1$	$< 2,5$	0,4
1000	3000	$10,5 \pm 1$	$8,8 \pm 1$	$< 1,7$	0,1

Si può dire che i nostri risultati danno una conferma dell'esistenza di un processo che fornisce una rapida distruzione dei livelli in discorso nell'argon ad elevate pressioni.

Una discussione più dettagliata intorno ai processi di decadimento si trova in appendice.

*C) Soglia di corona.* — Consideriamo l'aspetto degli impulsi in soglia di corona.

Se la corona è dovuta al solo processo fotoelettrico, la soglia di corona è raggiunta al valore di moltiplicazione  $N_s$  definito dalla (1).

La ragione della successione di fotoimpulsi in questa ipotesi diventa a termini costanti.

Esaminando agli inizi della corona la forma degli impulsi  $\alpha$  e  $\gamma$  con  $RC$  di  $1 \mu s$  si vede che la successione dei fotoimpulsi ha andamento convergente.

I piccoli valori di  $RC$  usati, inferiori al tempo di salita degli impulsi, produ-



cono una riduzione del valore della ragione della successione dovuta al fatto che i tempi di salita vanno allungandosi e quindi gli impulsi susseguenti sono più diminuiti in ampiezza.

Tenendo conto in modo approssimativo di questo fatto si può valutare che la ragione della successione in soglia non sia inferiore a 0,7-0,9.

Non si può escludere pertanto che all'accensione della corona contribuiscano anche altri processi che potrebbero non apparire nella struttura degli impulsi perchè non osservabili nelle condizioni sperimentali usate; si può però dire che questi processi non portano un contributo rilevante all'accensione della corona alle pressioni da noi usate <sup>(26)</sup>.

## 6. - Miscela A + CO<sub>2</sub>. Spegnimento degli atomi eccitati.

Le miscele argon + anidride carbonica sono state studiate a pressioni da 150 a 1000 mm Hg e con concentrazioni di CO<sub>2</sub> da 10<sup>-4</sup> a 10<sup>-1</sup>. Descriviamo qui i risultati ottenuti con concentrazioni inferiori a 5·10<sup>-3</sup>.

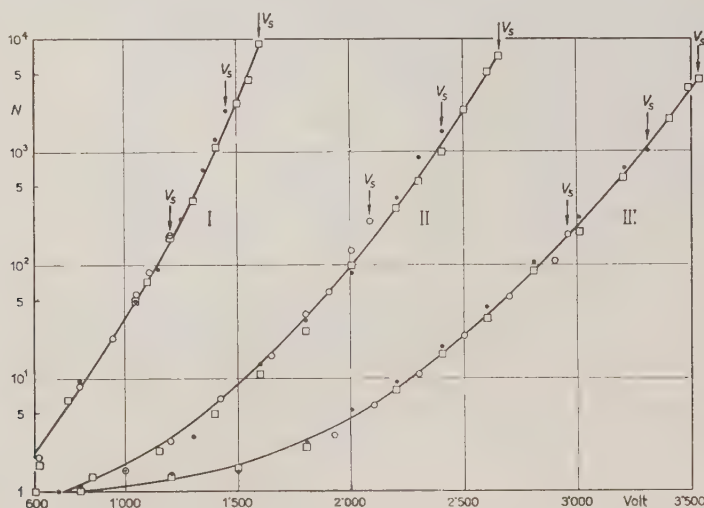


Fig. 10. - Curve di moltiplicazione per miscela argon-anidride carbonica:

- I)  $p = 150$  mm Hg; II)  $p = 500$  mm Hg; III)  $p = 1000$  mm Hg  
 ○ argon; ● argon +  $3 \cdot 10^{-4}$  CO<sub>2</sub>; □ argon +  $17 \cdot 10^{-4}$  CO<sub>2</sub>.

<sup>(26)</sup> Notiamo che recentemente LAUER (*Journ. of Appl. Phys.*, 23, 300 (1952)) ha messo in evidenza la presenza di un processo di estrazione ione-catodo nell'argon usando catodi di nichel ben degassati.

A) *Risultati sperimentali.* — La fig. 10 rappresenta alcune curve di moltiplicazione.

Si nota che nel tratto iniziale le curve a pari pressione si sovrappongono l'una all'altra entro gli errori di misura che si possono ritenere del 20%.

Gli impulsi  $\alpha$  e  $\gamma$  ad elevati valori della moltiplicazione sono costituiti da una successione di impulsi del tipo descritto nel caso dell'argon (figg. 11 e 12).

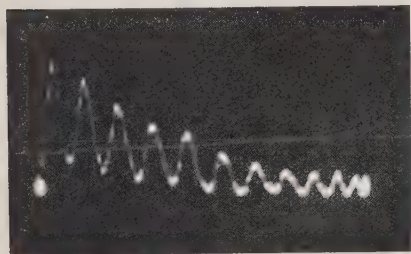


Fig. 11. — Impulso  $\gamma$  in argon +  $5 \cdot 10^{-4}$   $\text{CO}_2$  poco sotto la soglia Geiger.

Pressione = 500 mm Hg; Segnali di taratura = 1  $\mu\text{s}$ ;  $RC = 1 \mu\text{s}$ .

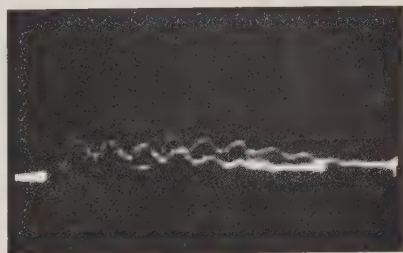


Fig. 12. — Impulso  $\gamma$  in argon +  $17 \cdot 10^{-4}$   $\text{CO}_2$  poco sotto la soglia Geiger.

Pressione = 150 mm Hg; Segnali di taratura = 1  $\mu\text{s}$ ;  $RC = 1 \mu\text{s}$ .

La ragione della successione è al solito crescente con il crescere della moltiplicazione fino a raggiungere la divergenza.

Per queste miscele abbiamo osservato un valore di tale ragione uguale a 1 ed anche più grande di 1 senza avere una corona stabile.

Una discussione dettagliata del comportamento del contatore in soglia di divergenza è presentata nel paragrafo 7; ci interessa qui studiare il valore  $N_s$  della moltiplicazione in soglia di divergenza, intendendosi per soglia di divergenza quel valore  $V_s$  della tensione a cui la ragione della successione è 1.

I valori ottenuti per  $N_s$  sono rappresentati in fig. 13.

Si vede che  $N_s$  in funzione della concentrazione di  $\text{CO}_2$  e a pressioni di 150-500-1000 mm Hg cresce circa linearmente con  $X$  e che la pendenza delle rette  $N_s(X)$  è più grande per i bassi valori della pressione.

B) *Discussione.* — Dal fatto che a parità di tensione applicata non vari praticamente il valore della moltiplicazione con la percentuale di  $\text{CO}_2$  come si vede per esempio nelle curve di fig. 10, si può dedurre che la struttura della valanga di Townsend non è praticamente influenzata da piccole percentuali di  $\text{CO}_2$ . Ne segue che  $\alpha$ , numero di atomi eccitati generati nella valanga per elettrone, si può ritenere indipendente dalla concentrazione  $X$  della  $\text{CO}_2$ .

Le successioni di impulsi che si osservano in tutte le miscele e pressioni descritte in questo paragrafo possono interpretarsi come nel caso dell'argon

puro, come successioni di fotoimpulsi: la ragione della successione è data da  $N(I)\alpha\beta GK(1-P)\gamma$ .

$P$  indica la probabilità che i livelli eccitati di risonanza e metastabili si distruggano per urti con le molecole di  $\text{CO}_2$ , di tipo diverso da quelli sull'argon, senza dar luogo a fotoni efficienti per l'estrazione fotoelettrica.

Il valore di soglia  $N_s$  è determinato da

$$(2) \quad N_s \alpha \beta K G (1 - P) \gamma = 1.$$

Le quantità considerate possono dipendere in generale dalla pressione e dalla concentrazione di  $\text{CO}_2$ .

Non si sa con precisione quale sia la dipendenza di  $\gamma$ , rendimento fotoelettrico del catodo, dalla concentrazione  $X$ , pertanto riteniamo che non sia fortemente variabile con essa;  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $K$  sono da ritenersi costanti.

TABELLA II. — *Livelli eccitati dell'atomo di argon.*

Termini	Energia di eccitazione eV	Tipo del livello
$^1S_0$	0	Stato fondamentale
$^3P_2$	11,545	Metastabile
$^3P_1$	11,620	Risonante
$^3P_0$	11,720	Metastabile
$^1P_1$	11,825	Risonante
$^1,^3S, P, D$	12,7 – 13,3	
$^1,^3P$	14,0 – 14,9	
$^1,^3P, D, F$	14,1 – 14,3	
	$\left\{ \begin{array}{l} 15,68 \\ 15,86 \end{array} \right.$	Ionizzazione

La forte variazione di  $N_s$  con  $X$  può essere attribuita o ad una riduzione della probabilità  $G$  che hanno i fotoni di raggiungere il catodo, o ad un aumento con  $X$  della probabilità  $P$  che i livelli eccitati di argon si distruggano per urto senza dar luogo a fotoni duri.

$G$  potrebbe essere ridotto a causa dell'assorbimento dei fotoni da parte della  $\text{CO}_2$ . Si vede facilmente che questo processo deve dare per  $G$  e quindi per  $N_s$  una dipendenza esponenziale della quantità di  $\text{CO}_2$  contenuta nel contatore.

I risultati sperimentali non sono in accordo con questa conclusione, in quanto  $N$  dipende linearmente da  $X$  e la dipendenza dalla pressione totale è in senso opposto a quella prevista. Questo porta ad escludere l'assorbimento dei fotoni come processo importante per la riduzione di  $N_s$ . Si può dire che  $G = 1$  anche in presenza di  $\text{CO}_2$ .

Per la variazione di  $P$  vanno considerati gli urti di seconda specie che gli atomi eccitati di argon fanno sulla  $\text{CO}_2$  durante la loro permanenza nel gas.

Processi di questo tipo sono stati studiati da parecchi autori <sup>(18)</sup>. In generale si ha che l'energia di eccitazione dell'atomo eccitato è ceduta alla molecola urtata che rimane dissociata o eccitata o ionizzata.

Nel presente caso la reazione avviene probabilmente secondo lo schema <sup>(27)</sup>



Il  $\text{CO}^*$  rimane eccitato per 6 eV.

L'energia della reazione è circa 11,5 eV ed è molto vicina a quella dei livelli eccitati dell'argon che consideriamo. Questo può favorire a causa della risonanza la probabilità del processo <sup>(28)</sup>.

In prima approssimazione consideriamo che gli atomi eccitati si trovino in un solo livello e sia  $N^*$  il numero di questi atomi presenti nel contatore. L'equazione di decadimento si può scrivere:

$$(3) \quad dN^* = -\frac{N^*}{T_{f_0}} dt - N^* n_{\text{CO}_2} \bar{\sigma} v dt,$$

—  $(N^*/T_{f_0})$  rappresenta il decadimento esponenziale che tiene conto del processo di distruzione in argon

—  $N^* n_{\text{CO}_2} \bar{\sigma} v$  rappresenta la distruzione dei livelli per urto su  $\text{CO}_2$

$n_{\text{CO}_2} = n_A X$  = numero di molecole di  $\text{CO}_2$  per  $\text{cm}^3$

$n_A$  = numero di atomi di argon per  $\text{cm}^3$

$\bar{\sigma}$  = sezione d'urto del processo di diseccitazione sulla  $\text{CO}_2$

$v$  = velocità media.

<sup>(27)</sup> H. J. HENNING: *Ann. der Phys.*, **13**, 529 (1932).

<sup>(28)</sup> N. F. MOTT e H. S. MASSEY: *The Theory of Atomic Collisions* (Oxford, 1949), Cap. XII.

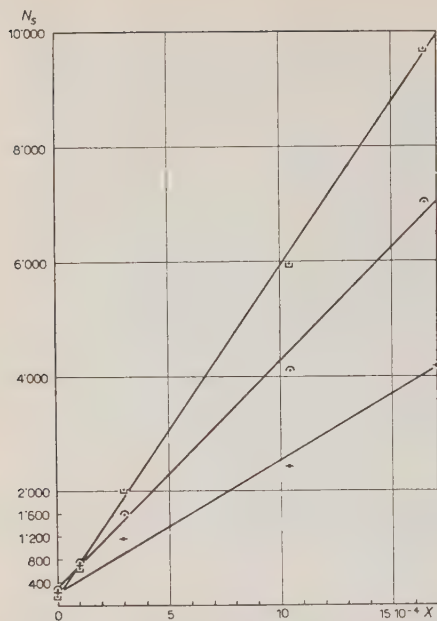


Fig. 13. - Valori di  $N_s$  in funzione di  $X$ , concentrazione di  $\text{CO}_2$ :  $\blacksquare$  pressione = 150 mm Hg;  $\bullet$  pressione = 500 mm Hg;  $\cdot$  pressione = 1000 mm Hg

pressione. Questo sembra indicare che anche nel nostro argon la distruzione dei livelli in discorso sia regolata dallo stesso processo messo in luce da MOLNAR.

La frazione di atomi eccitati che viene distrutta in argon producendo i fotoni utili è data evidentemente da

$$(4) \quad 1 - P = \frac{1}{1 + n_A v \bar{\sigma} T_{f_0} X},$$

e si ha infine dalla (2)

$$(5) \quad N_s = \frac{1}{\alpha \beta \gamma K} (1 + n_A v \bar{\sigma} T_{f_0} X).$$

Nelle approssimazioni fatte, la formula (5) dà per  $N_s$  un andamento lineare con  $X$ . Tenuto conto degli errori di misura, questa formula rappresenta soddisfacentemente i risultati sperimentali.

Dall'equazione (5) e dai risultati di fig. 13 possono essere dedotti i valori di  $T_{f_0} \bar{\sigma}$  alle varie pressioni, essendo noti gli altri parametri.

Questi valori sono rappresentati nella tab. III, e sono decrescenti proporzionalmente al quadrato della

TABELLA III. - Valori di  $\bar{\sigma} T_{f_0}$  e di  $\bar{\sigma}$  dedotti dalle curve di fig. 13.

Pressione (mm Hg)	$n_A v \bar{\sigma} T_{f_0}$	$n_A v$ $\text{cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$	$\bar{\sigma} T_{f_0}$ $\text{cm}^2 \text{ s}$	$\bar{\sigma}$ $\text{cm}^2$
150	33 820	$0,18 \cdot 10^{24}$	$187,8 \cdot 10^{-21}$	$458 \cdot 10^{-16}$
500	14 507	$0,61 \cdot 10^{24}$	$23,8 \cdot 10^{-21}$	$595 \cdot 10^{-16}$
1 000	7 720	$1,22 \cdot 10^{24}$	$6,33 \cdot 10^{-21}$	$633 \cdot 10^{-16}$

Utilizzando i valori di  $(T_{f_0})_M$  di tab. I, ottenuti estrapolando i valori di MOLNAR, si ottengono i valori della  $\sigma$  riportati nell'ultima colonna della tab. III.

Informazioni sul diverso comportamento dei livelli risonanti e metastabili

dovuto a diversi valori delle sezioni d'urto del processo di distruzione e alla probabilità di transizione dall'uno all'altro di questi livelli potrebbero cercarsi studiando in maggior dettaglio le curve di  $N_s(X)$  specialmente nel primo tratto dove si realizza lo spegnimento del grosso degli atomi eccitati.

I limiti della precisione della nostra misura e le scarse informazioni che si hanno a disposizione per quel che concerne questi processi, non ci consentono di perfezionare i nostri risultati. Così pure rimane incerto il significato preciso della  $\bar{\sigma}$  data nella tab. III.

*D) Purezza dell'argon.* — Si vede dalla fig. 13 che il valore di  $N_s$  è sensibile a concentrazioni di  $\text{CO}_2$  dell'ordine di  $10^{-4}$  e meno.

Da questo si può dedurre che l'argon usato per le miscele contiene meno di  $10^{-4}$  di  $\text{CO}_2$  o impurezze che abbiano lo stesso effetto di spegnimento dei livelli eccitati.

## 7. — Miscela A + $\text{CO}_2$ . Formazione della zona Geiger.

### 1) RISULTATI SPERIMENTALI.

Vogliamo considerare in questo paragrafo più in dettaglio la forma degli impulsi ottenuti con le miscele A +  $\text{CO}_2$  per concentrazioni di  $\text{CO}_2 < 5 \cdot 10^{-3}$  ed in particolare l'aspetto degli impulsi alla soglia di divergenza del processo fotoelettronico.

*A) Forma degli impulsi.* — Gli impulsi  $\alpha$  e  $\gamma$  ad elevati valori della moltiplicazione sono costituiti da successioni di impulsi fotoelettronici di ragione crescente con la tensione.

Dall'esame di queste successioni si ottiene:

1) la distanza  $T$  fra l'uno e l'altro degli impulsi successivi decresce con il crescere della percentuale di  $\text{CO}_2$ . I valori ottenuti per  $T$  sono illustrati nella tab. IV per pressioni di 500 e 1000 mm Hg;

2) la nettezza con cui si separano i fotoimpulsi successivi è tanto più grande quanto più grande è la percentuale di  $\text{CO}_2$ . Con  $5 \cdot 10^{-4}$  di  $\text{CO}_2$  a pressioni di 500 e 1000 mm Hg si distingue nettamente qualche centinaio di fotoimpulsi a seguito di un impulso  $\gamma$  primario.

A pressioni di 150 mm Hg si distinguono nettamente i fotoimpulsi con concentrazioni di  $\text{CO}_2$  più grandi di  $10^{-3}$ .

*B) Soglia di corona: miscele con concentrazioni di  $\text{CO}_2 < 5 \cdot 10^{-4}$ .* — In queste miscele raggiunto il valore della moltiplicazione di soglia di divergenza, ( $N = N_s$ ), si ha bruscamente la zona di corona instabile.



TABELLA IV. — Valori del tempo  $T$ , fra i fotoimpulsi in A e in miscele A + CO<sub>2</sub>.

Pressione (mm Hg)	Concentrazione di CO <sub>2</sub>	$T$ ( $\mu$ s)
1000	0	10,5
"	10 <sup>-4</sup>	8,9
"	3 · 10 <sup>-4</sup>	8,1
"	9 · 10 <sup>-4</sup>	6,3
"	17 · 10 <sup>-4</sup>	4,4
500	0	10,2
"	10 <sup>-4</sup>	8,3
"	3 · 10 <sup>-4</sup>	7
"	9 · 10 <sup>-4</sup>	6
"	17 · 10 <sup>-4</sup>	4,1

Gli impulsi  $\gamma$  alla soglia sono costituiti da una successione di fotoimpulsi distinti molto lunga che ne comprende qualche centinaio. La successione ha dapprima andamento convergente con ragione prossima ad 1 e procede poi a termini pressapoco costanti.

Ogni impulso si può considerare come un burst di corona il cui spegnimento è di natura statistica.

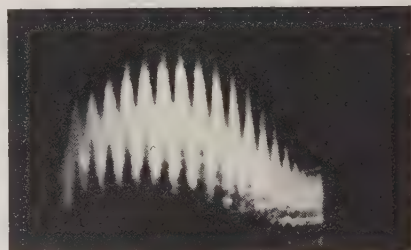
Pochi volt più sopra si ha la corona stabile.

C) *Formazione della zona Geiger: miscele con concentrazioni di CO<sub>2</sub> fra*

Fig. 14. — Impulso  $\gamma$  nella zona Geiger.

Ar +  $\sim 10^{-3}$  CO<sub>2</sub>.

Pressione = 760 mm Hg; Durata della traccia = 50  $\mu$ s; RC = 1  $\mu$ s.

Fig. 15. — Impulsi  $\gamma$  sovrapposti nella zona Geiger. A + 17 · 10<sup>-4</sup> CO<sub>2</sub>.

Pressione = 1000 mm Hg; Distanza fra i fotoimpulsi = 4,4  $\mu$ s; RC = 1  $\mu$ s.

5 · 10<sup>-4</sup> e 5 · 10<sup>-3</sup>. — A concentrazioni di CO<sub>2</sub> maggiori di 5 · 10<sup>-4</sup> si raggiungono valori di  $N > N_s$ ; senza che si accenda la corona instabile.

Gli impulsi  $\gamma$  sono del tipo di fig. 14.



La successione ha un andamento dapprima divergente e poi convergente fino a spegnersi. La struttura di questi gruppi di fotoimpulsi è indipendente dalla ionizzazione iniziale (fig. 15). Per questo il gruppo di fotoimpulsi si può



Fig. 16. - Dettaglio di bursts nella zona di corona instabile.  $A + \sim 10^{-3} \text{ CO}_2$ . Pressione = 760 mm Hg; Durata della traccia = 100  $\mu\text{s}$ ;  $RC = 1 \mu\text{s}$ .

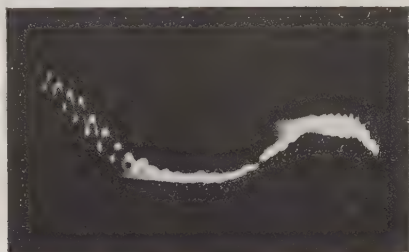


Fig. 17. - Dettaglio di burst nella zona di corona instabile.  $A + \sim 10^{-3} \text{ CO}_2$ . Pressione = 760 mm Hg; Durata della traccia = 100  $\mu\text{s}$ ;  $RC = 1 \mu\text{s}$ .

chiamare impulso Geiger e la zona di tensione, in cui si ha questo comportamento, zona Geiger.

In queste miscele la soglia di divergenza  $V_s$ , definita nel paragrafo 6, corrisponde alla soglia della zona Geiger.

L'ampiezza di questa zona è di qualche decina di volt. Dopo di essa si ha una zona di corona instabile formata di bursts spenti statisticamente. Le figg. 16 e 17 rappresentano particolari di bursts di corona in cui la struttura a impulsi fotoelettronici è messa in evidenza con  $RC$  di 1  $\mu\text{s}$ .

L'ampiezza dei singoli fotoimpulsi oscilla periodicamente.

Alla fine della zona instabile, ampia pochi volt, si accende la corona stabile, con andamento oscillante.

Un comportamento di questo tipo è stato osservato anche con parecchi contatori di diametro da 2 a 15 cm a pressioni da 200 a 1500 mm Hg e con miscele di  $A + 10^{-3}$  di  $\text{CO}_2$  <sup>(29)</sup> (figg. 18, 19, 20 e 21).

È interessante notare che nelle zone Geiger e nelle zone di corona instabile, mentre gli impulsi  $\gamma$  hanno l'aspetto descritto, le particelle  $\alpha$  danno luogo ad impulsi convergenti e con ragione dell'ordine di 0,5 (fig. 22).

<sup>(29)</sup> L. COLLI, U. FACCHINI e E. GATTI: *Phys. Rev.*, **80**, 92 (1950); L. COLLI, U. FACCHINI e E. GATTI: *Phys. Rev.*, **84**, 606 (1951).

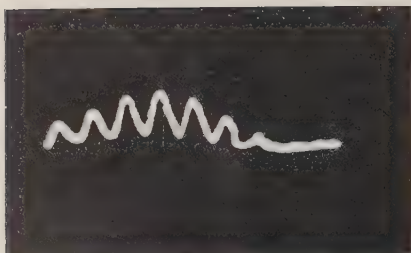


Fig. 18. - Impulso  $\gamma$  nella zona Geiger.  $A + \sim 10^{-3} \text{ CO}_2$ .

Diametro del contatore = 90 mm; Pressione = 760 mm Hg; Tempo fra i fotoimpulsi = 12  $\mu\text{s}$ .

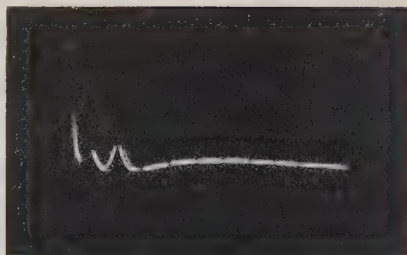


Fig. 19. - Burst all'inizio della zona di corona instabile.  $A + \sim 10^{-3} \text{ CO}_2$ . Diametro del contatore = 20 mm; Pressione = 760 mm Hg; Segnali di taratura = 100  $\mu\text{s}$ ;  $RC = 10 \mu\text{s}$ . I gruppi di impulsi fotoelettronici appaiono come singoli impulsi per via dell'elevata  $RC$ .

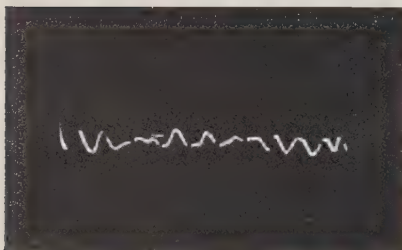


Fig. 20. - Burst alla fine della zona di corona instabile.  $A + \sim 10^{-3} \text{ CO}_2$ . Diametro del contatore = 20 mm; Pressione = 760 mm Hg; Segnali di taratura = 100  $\mu\text{s}$ ;  $RC = 10 \mu\text{s}$ . I gruppi di impulsi fotoelettronici appaiono come singoli impulsi per via dell'elevata  $RC$ .

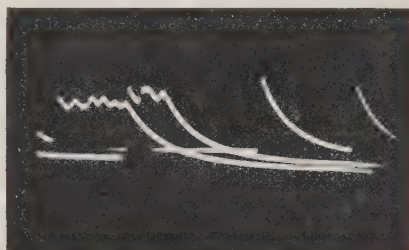


Fig. 21. - Bursts nella zona di corona instabile.  $A + \sim 10^{-3} \text{ CO}_2$ . Diametro del contatore = 130 mm; Pressione = 760 mm Hg; Durata della traccia = 30  $\mu\text{s}$ ;  $RC = 200 \mu\text{s}$ .

## 2. - DISCUSSIONE DEI RISULTATI SPERIMENTALI.

A) *Distanza dei fotoimpulsi.* - Le successioni di impulsi descritte sono da ritenersi, come nel caso dell'argon, dovute al processo fotoelettronico sul catodo.

La distanza di tempo  $T$  fra gli impulsi fotoelettronici successivi è la somma

di due tempi  $T_f$  e  $T_e$ ;  $T_f$  tempo di decadimento dei livelli eccitati nella miscela e  $T_e$  tempo di transito dei fotoelettroni nella miscela.

Da quanto visto nel paragrafo 6 si può dedurre che  $T_f$  è fortemente ridotto per effetto degli urti di spegnimento dei livelli eccitati dell'A su  $\text{CO}_2$  <sup>(30)</sup>;  $T_e$  è pure ridotto per effetto delle  $\text{CO}_2$  in quanto questo gas molecolare aumenta la velocità di migrazione degli elettroni in campo elettrico <sup>(31)</sup>.

Percentuali di 0,1% di  $\text{CO}_2$  raddoppiano circa il valore di tale velocità <sup>(14)</sup>.

Si può notare osservando il forte effetto di spegnimento mostrato dalle curve in fig. 13 che  $T_f$  è ridotto più fortemente che  $T_e$ .

Questo è in accordo col fatto che la nettezza di separazione dei fotoimpulsi migliora aumentando la percentuale di  $\text{CO}_2$ .

*B) Effetto della carica spaziale.* — La forma degli impulsi all'inizio della corona alle varie concentrazioni e la formazione della zona Geiger descritta in 1, C) si spiegano facilmente considerando l'effetto della carica positiva generata sul filc. Consideriamo, per semplicità, alla soglia di divergenza, l'effetto di riduzione del campo elettrico che è prodotto da un impulso iniziale generato da un arrivo uniforme su tutto il filo di  $q_0$  elettroni primari per cm. Nascono nella valanga di Townsend  $q_0 \cdot N_s$  ioni per cm. Questi ioni si allontanano dal filo con una velocità  $W^+ = kE$  essendo  $k$  la mobilità ed  $E$  il campo elettrico.

L'abbassamento di potenziale prodotto da una guaina di ioni di densità  $q_0 \cdot N_s$  collocati a distanza  $r^*$  dal filo è rappresentata dalla formula (3) <sup>(32)</sup>.

$$(6) \quad V' = V_s - q_0 N_s \ln \frac{a^2}{r^{*2}}.$$

<sup>(30)</sup>  $T_f$  per miscele di A +  $\text{CO}_2$  è data, con le notazioni usate, da

$$T_f = \frac{T_{f_0}}{N_s} \frac{1}{\alpha \beta \gamma K}.$$

<sup>(31)</sup> B. ROSSI e H. STAUB: *Ionization Chambers and Counters* (New York, 1949).

<sup>(32)</sup> La formula (6) vale quando la  $R'$  del contatore è piccola, il che è verificato nel nostro caso.

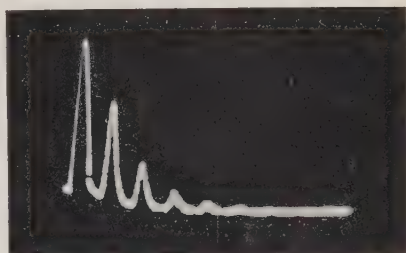


Fig. 22. Impulso di particella  $\alpha$  nella zona Geiger.

In questa formula si considera il catodo a potenziale 0, il filo a potenziale  $V_s$  in assenza di guaina. Il campo vicino al filo in presenza di guaina corrisponde al potenziale  $V'$  del filo;  $a$  è il raggio del contatore.

La moltiplicazione per i fotoelettroni secondari che arrivano sul filo dopo il tempo  $T$  è determinata dal valore di campo che trovano nella zona di valanga.

Assumiamo in prima approssimazione la mobilità degli ioni positivi di argon indipendente dal campo  $E$  e dalla percentuale di  $\text{CO}_2$ . Si ha facilmente che la distanza  $r$  percorsa nel tempo  $T$  è data dalla legge  $r^{*2} = \chi T + b^2$  con  $\chi = 2kV/\ln(a/b)$  essendo  $b$  il raggio del filo e  $V$  il potenziale agente sugli ioni, che è dell'ordine di  $V_s$ .

La formula (6) diventa

$$(7) \quad V' = V_s - q_0 N_s \ln \frac{a^2}{\chi T + b^2}.$$

Si può concludere che l'effetto di carica spaziale come descritto dalla formula riduce  $V_s$  e quindi la ragione della successione di fotoimpulsi tanto più è grande  $N_s$  ed è piccolo  $T$ .

Un calcolo della formazione degli impulsi che tenga conto di tutta la successione e dello spandersi lungo il filo degli impulsi è molto complicato e non è stato da noi abbordato.

Pertanto, poichè con l'aumento delle percentuali di  $\text{CO}_2$  vengono ridotti i valori di  $T$  ed aumentati i valori di  $N_s$ , si può ritenere che l'effetto di riduzione della ragione per via della carica spaziale è più forte a percentuali più elevate di  $\text{CO}_2$ .

In particolare a percentuali di  $\text{CO}_2 > 0,05\%$  ( $T < 7 \mu\text{s}$ ,  $N_s > 2000$ ) questo effetto impedisce il formarsi della corona al valore della divergenza del processo fotoelettrico e produce l'autospegnimento degli impulsi aventi ragione iniziale  $> 1$ .

Si può descrivere come segue la forma degli impulsi di fig. 14. La moltiplicazione iniziale ha un valore  $N > N_s$  e la successione procede divergente. La carica spaziale formatasi in un primo gruppo di fotoimpulsi riduce il campo in modo che  $N$  sia ridotto minore di  $N_s$ ; questo succede intorno al fotoimpulso di valore massimo del gruppo. Di poi  $N$  è tenuto  $< N_s$  fino al completo spegnimento della successione fotoelettrica.

La carica è sparsa con questo meccanismo lungo tutto il filo del contatore. La formazione della zona Geiger è chiaramente dovuta all'effetto di carica spaziale, in accordo con quanto è stato assunto da vari autori; da nostri risultati si ha però che questo accade solo con concentrazioni di  $\text{CO}_2$  superiori a  $5 \cdot 10^{-4}$ .

L'andamento dei bursts rilevati nelle figg. 16-17 è spiegato con la forma-

zione e l'allontanamento degli ioni positivi, che determina un'oscillazione del campo sul filo intorno al valore di soglia.

Si vede chiaramente con un ragionamento del tipo di quello fatto sopra che i valori di  $N$  prossimi ad  $N_s$  si hanno nei massimi e nei minimi delle oscillazioni.

La carica spaziale non riesce più in queste condizioni a spegnere completamente gli impulsi fotoelettronici.

*C) Zona Geiger: contatori lenti.* — Vogliamo considerare un poco più in dettaglio le proprietà della zona Geiger e della zona di corona instabile. Come si è detto queste zone sono molto ristrette e non hanno utilità pratica ai fini del conteggio.

Notiamo pertanto che sono ottenute con valori di  $RC$  da 1 a 200  $\mu s$  e senza circuito di spegnimento esterno. È evidente che usando elevati valori di  $RC$  o circuito di spegnimento esterno si possono ottenere ampie zone Geiger poiché con questi artifici si può impedire per un certo campo di tensioni il riaccendersi della corona.

Il comportamento dei nostri contatori è identificabile con quello dei cosiddetti *slow counters*.

*D) Altri processi.* — Come si è visto nei paragrafi precedenti, la formazione della zona Geiger e della corona si possono completamente spiegare a mezzo del processo fotoelettronico al catodo. La netta separazione dei fotoimpulsi e la loro correlazione fino a tempi di qualche ms indica che altri processi giocano un ruolo trascurabile rispetto a questo processo.

In particolare non è importante, alle pressioni e percentuali usate, un processo di fotoionizzazione nel gas.

Non si è avuta inoltre evidenza del processo di estrazione ione-catodo, invocato da alcuni autori per spiegare la mancanza di estese zone Geiger nei contatori ad argon. Questo processo dovrebbe produrre elettroni dopo un tempo dell'ordine di 2-8 ms dalla valanga iniziale, corrispondente al tempo di transito degli ioni nel contatore nelle varie condizioni.

Per quelle miscele ( $5 \cdot 10^{-4} < X < 5 \cdot 10^{-3}$ ) dove si hanno la zona Geiger e la zona di corona instabile si possono trarre alcune conclusioni più precise riguardo questo processo.

a) La fine della zona Geiger è come si è visto determinata dal meccanismo fotoelettronico.

b) Gli impulsi fotoelettronici nei bursts di corona instabile sono ben correlati fino a tempi corrispondenti al tempo di transito degli ioni  $T^+$ ; non c'è arrivo importante di elettroni al tempo  $T^+$ .

c) I massimi nei bursts di corona instabile capitano a tempi inferiori



a  $T^+$  cioè non si possono attribuire questi massimi ad un arrivo di elettroni prodotti al catodo dagli ioni.

d) Si osservano nella zona Geiger impulsi autospegnentisi ben separati e non correlati fra loro, ciascuno dei quali dura qualche centinaio di  $\mu s$ .

La carica totale contenuta in uno di questi impulsi è dell'ordine di  $10^8$  cariche elettroniche. Si deduce da ciò che la probabilità del processo ione-catodo è inferiore a  $10^{-8}$ .

*E) Particelle  $\alpha$ .* - Il fatto che nella zona Geiger e di corona instabile gli impulsi dati da particelle  $\alpha$  abbiano aspetto convergente è facilmente spiegato invocando la riduzione di moltiplicazione che si ha ad elevate moltiplicazioni, per la densa ionizzazione primaria di queste particelle.

Questo effetto è dovuto alla riduzione del campo sul filo ad opera degli ioni positivi formati nella valanga che riducono lo sviluppo della valanga stessa.

Si ha allora  $N_\alpha < N_\gamma$  con  $N_\alpha$  coefficiente di moltiplicazione iniziale per particelle  $\alpha$  ed  $N_\gamma$  coefficiente di moltiplicazione iniziale per impulsi  $\gamma$ . Nella breve zona Geiger si può assumere  $N_\gamma > N_s$  ed  $N_\alpha < N_s$ ; mentre gli impulsi  $\gamma$  hanno inizio divergente le particelle  $\alpha$  danno impulsi convergenti.

## 8. - Miscela A + CO<sub>2</sub>. Contatori rapidi.

Non abbiamo condotto uno studio sistematico del comportamento del contatore con percentuali di CO<sub>2</sub> maggiori di 0,5%. Abbiamo soltanto tratto alcune osservazioni che riteniamo utile descrivere.

Con pressioni di 500 e 1000 mm Hg e percentuale di 1% di CO<sub>2</sub> si nota ad elevati valori delle moltiplicazioni l'apparire degli impulsi fotoelettronici.

Il tempo fra i fotoimpulsi è dell'ordine di 1,5-2  $\mu s$  e al valore di moltiplicazione  $N_s \sim 20\,000$ -40 000 si ha la soglia di divergenza del processo che dà anche la soglia della zona Geiger. Questa zona si estende per qualche centinaio di volt. Gli impulsi Geiger hanno nel tratto iniziale della zona l'aspetto di fig. 14 e con l'aumento della tensione aumentano di ampiezza.

Aumentando la tensione appaiono inoltre meno netti i fotoimpulsi sino a che l'impulso Geiger è del tipo di fig. 23 e quindi di fig. 24.

A pressioni di 150 mm Hg la zona Geiger comincia a valori di  $N_s \sim 80\,000$  e gli impulsi già in soglia hanno un aspetto del tipo di fig. 23.

Con percentuali di CO<sub>2</sub> del 10% gli impulsi Geiger hanno subito in soglia l'aspetto continuo e rapido illustrato dalla fig. 24 a tutte le pressioni usate e non c'è traccia di impulsi fotoelettronici.

Per questo motivo è difficile misurare a questa percentuale il valore della moltiplicazione di soglia.

Le zone Geiger e le forme di impulsi ora descritte sono del tipo di quelle ottenute comunemente con miscele di argon e vapori organici.

L'andamento rapido e continuo dell'impulso è indice che nello spandersi

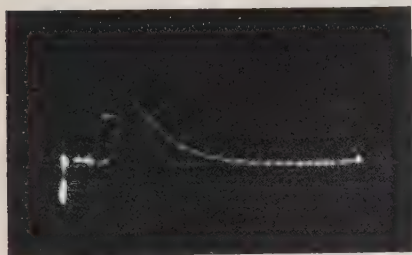


Fig. 23. - Impulso Geiger.  $A + 10^{-2} \text{CO}_2$ . Pressione = 500 mm Hg; Segnale di tarratura =  $1 \mu\text{s}$ ;  $RC = 1 \mu\text{s}$ . Lo spandersi della scarica è dovuto parzialmente all'effetto fotocatodico e parzialmente ad una produzione di elettroni nel gas.

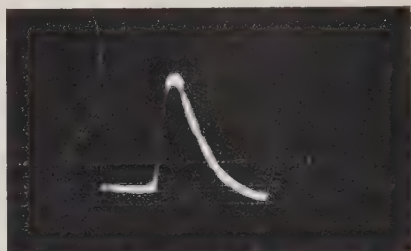


Fig. 24. -- Impulsi Geiger sovrapposti alla fine della zona Geiger.  $A + 10^{-2} \text{CO}_2$ . Pressione = 500 mm Hg; Segnali di tarratura =  $1 \mu\text{s}$ ;  $RC = 1 \mu\text{s}$ .

della carica è interessato in modo prevalente un processo di liberazione di elettroni nel gas.

Questo risultato è in accordo con la conoscenza attuale che si ha intorno al meccanismo dello spandersi della scarica nei contatori rapidi <sup>(33)</sup>.

Più precisamente si può dire che a percentuali di  $\text{CO}_2$  dell'ordine dell'1% lo spandersi della scarica avviene in parte per il processo fotocatodico e in parte per il processo nel gas. A percentuali maggiori invece il processo nel gas è prevalente.

La rapidità del processo di catodo e del processo nel gas e gli elevati valori di moltiplicazione fanno sì che l'effetto di spegnimento degli impulsi ad opera della carica spaziale sia più efficiente e permetta la formazione di zone Geiger abbastanza lunghe.

<sup>(33)</sup> Notiamo che processi di questo tipo possono anche essere provocati dagli atomi molto eccitati di argon i quali possono liberare elettroni in urti contro atomi di argon, per esempio per mezzo della reazione  $A^* + A \rightarrow (A_2)^* \rightarrow A_2^+ + e^-$  studiata recentemente da HORNBECK e MOLNAR (*Phys. Rev.*, **84**, 615 e 621 (1951)), oppure per mezzo di urti ionizzati contro atomi o molecole di un altro gas.

Lo spandersi della scarica in queste condizioni può essere favorito dalla diffusione di questi atomi eccitati in una ristretta zona intorno al filo per mezzo dei fotoni duri da essi emessi e che si possono considerare fotoni di risonanza.



## 9. - Miscela A + Hg.

Descriviamo in questo paragrafo alcuni risultati che abbiamo ottenuto contaminando con vapore di mercurio l'argon contenuto nel contatore. La pressione parziale del mercurio corrisponde alla sua tensione di vapore ed è, alla temperatura ambiente, dell'ordine di  $10^{-3}$  mm Hg.

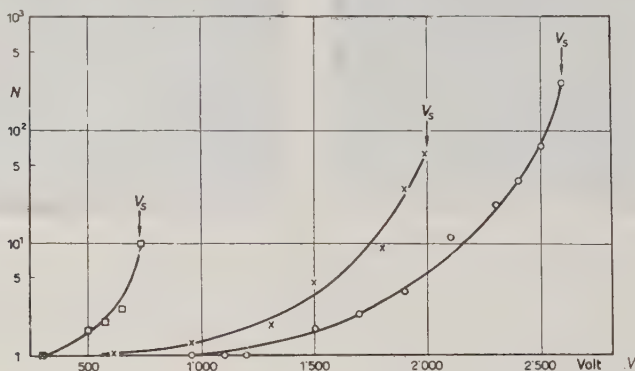


Fig. 25. - Curve di moltiplicazione per argon contaminato con vapori di mercurio alla tensione di vapore a 20 °C;  $\square$  pressione argon = 200 mm Hg;  $\times$  pressione argon = 600 mm Hg;  $\circ$  pressione argon = 900 mm Hg.

L'introduzione del mercurio è stata fatta in un impianto analogo a quello di fig. 1 comprendente due contatori di caratteristiche uguali a quello di fig. 2.

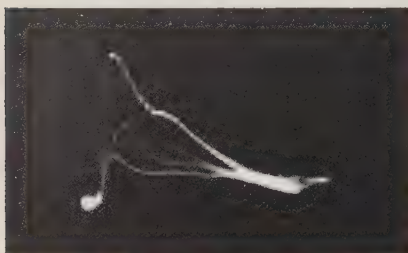


Fig. 26. - Impulsi di particelle  $\alpha$  in argon + vapore di mercurio alla soglia di corona. Pressione = 1000 mm Hg; Segnali di taratura =  $1 \mu s$ ;  $RC = 1 \mu s$ . La lenta discesa è dovuta a produzione di elettroni nel gas.

La fig. 25 rappresenta le curve di moltiplicazione relative a tre pressioni. Alla tensione  $V_s$  indicata nella figura si accende bruscamente la corona stabile. Come si vede i corrispondenti valori di  $N_s$  sono di molto inferiori a quelli per argon non contaminato.

A pressioni di 200-500 mm Hg non vi è traccia di fotoimpulsi nella forma degli impulsi rilevati in soglia di corona e osservati con valori di  $RC$  di  $1 \mu s$ ; a pressioni di 1000 mm Hg la forma degli impulsi è rappresentata nella fig. 26; la gobba della discesa si riconosce essere il contributo dell'ef-

fetto fotocatodico: la discesa continua ha andamento molto più lento di quel che comporta la costante di tempo  $RC$  usata.

Abbiamo studiato anche il comportamento di miscele  $A + 0,1\%$  di  $CO_2$  in presenza del vapore di mercurio ottenendo in questo caso lo stesso comportamento che si osserva in assenza del vapore di mercurio.

Questi risultati si interpretano facilmente nello schema discusso nei paragrafi 5 e 6 e tenendo conto dell'effetto Penning: ionizzazione per urto del Hg da parte di atomi eccitati di argon <sup>(12)</sup>. (Ricordiamo che l'energia di ionizzazione del Hg (10,4 eV) è inferiore all'energia di eccitazione degli atomi eccitati di argon negli stati risonanti e metastabili).

Gli atomi eccitati di A permangono un certo tempo nel gas diffondendo intorno al filo oltre che per usuale diffusione gassosa per mezzo dei fotoni di risonanza. Questi atomi hanno la possibilità di ionizzare per urto il Hg e l'elettrone prodotto serve a riaccendere la scarica.

Il nostro risultato in  $A + Hg$  indica che per l'accensione della corona alle basse pressioni questo processo è più importante di quello fotocatodico. Il contributo dell'effetto Penning diventa invece dello stesso ordine di quello fotocatodico a pressione di 1000 mm Hg, dove anche la concentrazione di mercurio è più piccola.

La forma degli impulsi in soglia di corona è in accordo con questa descrizione del meccanismo di accensione della corona in quanto l'andamento continuo della discesa è indice di un processo di produzione di elettroni nel gas.

Riguardo al comportamento della miscela  $A + 0,1\% CO_2 + Hg$  si può osservare che l'effetto di spegnimento della  $CO_2$  riduce fortemente la vita media degli atomi eccitati di argon in modo da rendere trascurabile il numero degli urti che tali atomi fanno contro gli atomi di Hg.

È interessante notare l'elevata criticità del comportamento dei contatori con argon puro a percentuali piccolissime di vapori o gas come il mercurio che sono ionizzabili per urto da parte degli atomi eccitati di argon.

## 10. - Conclusione.

In quelle miscele in cui l'effetto fotoelettronico è il processo determinante della scarica, si può, dall'osservazione degli impulsi, distinguere chiaramente la parte di essi dovuta alle valanghe di Townsend e quella dovuta al processo fotocatodico. Conseguentemente è possibile studiare i processi in questione in modo abbastanza preciso.

Dai nostri risultati si ottiene che il processo fotocatodico è responsabile della formazione delle zone Geiger e di corona in miscele fino a concentrazioni di  $CO_2$  di  $5 \cdot 10^{-3}$  e ad ogni pressione usata.

La stessa accuratezza non può essere ottenuta con quelle miscele in cui è presente una produzione di elettroni nel gas.

Processi di questo tipo sono molto interessanti in quanto producono uno spandersi della scarica nel contatore molto rapido.

I fotoni agenti nel processo fotocatodico sono da attribuirsi ai primi livelli eccitati dell'argon. Questi fotoni sono prodotti in collisioni che portano alla distruzione di questi livelli e non sono fotoni di risonanza. L'ordine di grandezza trovato per la vita media di questi livelli è in accordo con i valori che si ottengono estrapolando alle nostre pressioni i risultati di MOLNAR.

Misure dirette di questa quantità in tutto il campo di pressioni sarebbero molto interessanti per definire la natura del processo di distruzione dei livelli nell'argon.

Desideriamo ringraziare il prof. G. BOLLA ed il prof. B. FERRETTI per l'assistenza dataci nel corso del presente lavoro, il dr. F. M. PENNING per le utili discussioni e i consigli, i dr. MOLNAR e HORNBECK per la comunicazione dei loro risultati e l'ing. E. GATTI per l'aiuto datoci nei riguardi dell'apparecchiatura elettronica. Desideriamo infine ringraziare il prof. L. B. LOEB per l'interessante critica e gli utili consigli datici.

## APPENDICE

### 1. — Processi di decadimento dei livelli risonanti e metastabili nell'argon.

A) *Imprigionamento dei fotoni di risonanza.* — La radiazione di risonanza prima di raggiungere il catodo subisce il processo di assorbimento e di riemissione da parte degli atomi non eccitati del gas. Un calcolo di questa diffusione è stato recentemente sviluppato da HOLSTEIN <sup>(19)</sup>.

Questo autore ha messo in evidenza come l'assorbimento sia strettamente legato alla forma della riga di emissione: questi calcoli valgono in condizioni sperimentali tali che la forma della riga di emissione sia uguale a quella della riga di assorbimento.

A pressione superiore a 1 mm Hg la forma della riga è determinata dagli urti che l'atomo eccitato fa con gli atomi non eccitati durante la sua permanenza nel gas. Questi urti hanno l'effetto di allargare la riga. Per rappresentare la forma di una riga viene assunta generalmente una legge di dispersione data da:

$$(1') \quad K(\nu) d\nu = \frac{K_p d\nu}{1 + [4\pi(\nu - \nu_0)/\gamma_p]^2},$$

$K(\nu) d\nu$  = intensità relativa emessa nell'intervallo di frequenza compreso fra  $\nu$  e  $\nu + d\nu$ ;

$$K_p = \frac{\lambda_0^2}{2\pi} n \frac{g_2}{g_1} \frac{\gamma_0}{\gamma_p};$$

dove  $\lambda_0$  = lunghezza d'onda al centro della riga,  
 $\nu_0$  = frequenza al centro della riga,  
 $n$  = numero degli atomi per  $\text{cm}^3$ ,  
 $g_1, g_2$  = pesi statistici del livello eccitato e del livello fondamentale,  
 $\gamma_0$  = larghezza propria della riga,  
 $\gamma_p$  = larghezza della riga alla pressione  $p$ ;

$\gamma_p$  cresce linearmente con  $p$ ; a seguito di ciò  $K_p$  è indipendente dalla pressione.

HOLSTEIN ottiene, per una riga di forma rappresentata dalla (1'), che il decadimento degli atomi eccitati in un cilindro infinito, avviene principalmente secondo una legge esponenziale data da

$$N^*(t) = N_0^* \cdot \exp \left[ -\frac{g}{\tau^*} t \right],$$

dove  $N^*(t)$  = numero degli atomi eccitati al tempo  $t$ ,  
 $N_0^*$  = numero degli atomi eccitati al tempo  $t = 0$ ,  
 $\tau^* = 1/g$  = vita media propria del livello,  
 $1/g$  = numero di volte che un fotone è in media catturato e riemesso prima di raggiungere la superficie del cilindro.

Nella condizione di validità della (1') si ha per  $g$

$$g = 1,115 (\pi K_p R)^{-1/2},$$

essendo  $R$  il raggio del cilindro. Si ha che  $g$  è indipendente dalla pressione poichè ne è indipendente  $K_p$ .

Ci sono vari motivi per ritenere che la legge (1') non sia valida a pressioni elevate dell'ordine di 1 atm e più e non rappresenti bene la forma della riga alle sue ali (cioè per  $\nu - \nu_0$  abbastanza grandi).

Rimandiamo a (19) per una discussione più dettagliata limitandoci ad osservare che uno di questi motivi è dovuto al fatto che nella deduzione della formula si considera che la durata dell'urto (dimensioni atomiche/velocità relativa  $\cong 10^{-11}$  s) sia trascurabile rispetto al tempo fra due urti; il che non è valido a pressioni elevate (per esempio ad 1 atm il tempo fra due urti è  $\sim 6 \cdot 10^{-11}$  s).

Non si conoscono con precisione i limiti di validità di queste leggi e nessuna misura ci risulta essere stata fatta sull'allargamento di pressione delle

righe di risonanza dell'argon. Una verifica della teoria è stata ottenuta da HOLSTEIN e collaboratori nel caso del mercurio <sup>(34)</sup>.

*B) Transizioni per urto fra i livelli.* — Gli atomi eccitati in uno dei livelli  $^3P_0$ ,  $^3P_1$ ,  $^3P_2$ ,  $^1P_1$  possono transire da uno all'altro dei livelli contigui per urto con atomi non eccitati.

Per esempio fra i livelli  $^3P_2$  e  $^3P_1$  si ha la reazione



L'energia di reazione è di 0,075 eV; nel caso del passaggio  $^3P_2 \rightarrow ^3P_1$  è fornita dall'energia cinetica termica degli atomi.

Sia  $W_{21}$  il numero di transizioni per secondo  $^3P_2 \rightarrow ^3P_1$ ,

$W_{12}$  il numero di transizioni inverse per secondo  $^3P_1 \rightarrow ^3P_2$ ,

$E_2$  ed  $E_1$  le energie dei due livelli,

per il principio dei bilanci dettagliati, considerando il sistema in equilibrio termodinamico, si ha

$$\frac{W_{12}}{W_{21}} = \exp [-(E_2 - E_1)/kT].$$

In modo analogo vanno considerati gli altri tipi di transizioni fra i livelli.

I valori delle sezioni d'urto relative a queste transizioni non sono noti nel caso dell'argon.

*C) Altri processi nel gas.* — Secondo alcuni autori alla distruzione dei livelli eccitati contribuisce anche un processo di formazione di molecola fra un atomo eccitato ed un atomo normale di argon. Questa molecola si forma in uno stato eccitato e può attraverso i suoi livelli diseccitarsi fino alla dissociazione, non essendo stabili le molecole di gas nobile.

I fotoni emessi in questo tipo di diseccitazione, non essendo fotoni di risonanza dell'atomo di argon, non sono assorbiti dal gas.

Questo tipo di processo è stato invocato da PIKE <sup>(23)</sup> per spiegare alcune questioni connesse con i fenomeni di scarica nel neon.

Successivamente MEYEROTT <sup>(25)</sup> ha mostrato come a questo processo è da attribuirsi la distruzione dei livelli metastabili dell'elio.

Evidenza dell'esistenza di un processo di distruzione nel gas per gli atomi metastabili è stata ottenuta nel caso dell'argon da MOLNAR e PHELPS <sup>(20,22)</sup>. MOLNAR <sup>(21)</sup> osserva una durata di questi livelli decrescente con il crescere della pressione secondo la legge

$$(2') \quad A = 40p + 10p^2.$$

A probabilità di distruzione per secondo,  $p$  pressione in mm Hg.

Il termine  $p^2$  che diventa preponderante alle pressioni di qualche cm Hg può essere attribuito ad una sorta di processo di decadimento, probabilmente formazione di molecole eccitate, collegato con urti tripli nel gas.

<sup>(34)</sup> D. ALPERT, A. O. MCCOUBREY e T. HOLSTEIN: *Phys. Rev.*, **76**, 1257 (1949).



*D) Distruzione alle pareti.* — Alle pressioni dell'ordine dei mm Hg gli atomi eccitati possono diffondere verso le pareti del tubo contenitore e quivi diseccitarsi per urto.

Questo processo produce un decadimento dei livelli in prima approssimazione esponenziale e di vita media  $\lambda^2/D$  essendo  $\lambda$  la lunghezza di diffusione del recipiente <sup>(35)</sup> e  $D$  la costante di diffusione degli atomi, che è proporzionale a  $1/p$ .

## 2. — Calcolo del decadimento.

Consideriamo per semplicità solo i livelli  $^3P_2$  e  $^3P_1$  e scriviamo le equazioni del decadimento.

$$(3') \quad \begin{cases} \frac{dN_R}{dt} = -\frac{g}{\tau^*} N_R - W_{12} N_R + W_{21} N_M - \frac{D}{\lambda^2} N_R - A_R N_R, \\ \frac{dN_M}{dt} = -W_{21} N_M + W_{12} N_R - \frac{D}{\lambda^2} N_M - A_M N_M, \end{cases}$$

essendo

$N_R(t)$	il numero di atomi nello stato $^3P_1$ , risonante
$N_M(t)$	il numero di atomi nello stato $^3P_2$ metastabile
$\frac{dN_R}{dt}, \frac{dN_M}{dt}$	le corrispondenti variazioni per unità di tempo,
$(g/\tau^*)N_R$	rappresenta il decadimento con imprigionamento del livello $^3P_1$ come descritto in 1, A),
$W_{12}N_R$	numero di atomi eccitati nello stato $^3P_1$ che per secondo passano allo stato $^3P_2$ per urto contro atomi non eccitati di argon,
$W_{21}N_M$	numero di atomi $^3P_2$ che per secondo passano a $^3P_1$ per urto contro atomi non eccitati di argon,
$\frac{D}{\lambda^2} N_R, \frac{D}{\lambda^2} N_M$	rappresentano la diffusione alle pareti e la successiva distruzione per urto,
$A_R N_R, A_M N_M$	rappresentano un processo di distruzione nel gas essendo $A_R$ ed $A_M$ le corrispondenti probabilità per secondo.

Le equazioni (3') si risolvono facilmente e danno

$$(4') \quad \begin{cases} N_R = N_{R0} [\alpha_0 \exp [\xi_1 t] + (1 - \alpha_0) \exp [\xi_2 t]], \\ N_M = N_{M0} [\beta_0 \exp [\xi_1 t] + (1 - \beta_0) \exp [\xi_2 t]], \end{cases}$$

<sup>(35)</sup> Nel caso di recipiente cilindrico  $1/\lambda^2 = (2,4/R)^2 + (\pi/L)^2$  con  $R$  raggio e  $L$  lunghezza del cilindro.

con  $N_{R_0}$  e  $N_{M_0}$  numeri iniziali di atomi eccitati nei livelli risonante e meta-stabile e  $\xi_1$  e  $\xi_2$  dati da

$$(5') \quad \xi_{1,2} = -\frac{n+m}{2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(mn - W_{12}W_{21})}{(n+m)^2}} \right],$$

essendo

$$m = g/\tau^* + W_{12} + A_R + D/A^2, \quad n = W_{21} + A_M + D/A^2,$$

$\alpha_0$  e  $\beta_0$  sono legati dalle equazioni

$$(6') \quad \frac{\alpha_0 N_{R_0}}{\beta_0 N_{M_0}} = \frac{W_{21}}{\xi_1 + m}; \quad \frac{1 - \alpha_0}{1 - \beta_0} \cdot \frac{N_{R_0}}{N_{M_0}} = \frac{W_{21}}{\xi_2 + m}.$$

Le equazioni (4') danno per il decadimento dei due livelli una legge a due esponenziali di cui quella con decremento  $\xi_2$  rappresenta l'andamento asintotico.

Si può vedere come uno studio accurato dell'andamento delle popolazioni dei livelli permette di ottenere informazioni sui diversi processi di decadimento.

I risultati sperimentali sul decadimento dei livelli dell'argon sono troppo scarsi perchè si possa da essi trarre con precisione il peso dei vari processi interessati.

Si può pure vedere con facilità che per ottenere una durata dei livelli decrescente con la pressione con legge quadratica, come osservata da MOLNAR, bisogna necessariamente fare intervenire almeno uno dei termini  $A_R$ ,  $A_M$  che tengono conto in modo opportuno di una distruzione per urto nel gas.

## SUMMARY

The multiplication curves and the pulse shapes have been studied in a counter filled with pure argon and argon plus carbon dioxide mixtures at pressures ranging from 150 to 1000 mm Hg. The pulse shapes in argon in the high proportional zone and up to voltages corresponding to the corona threshold are explained by assuming a production in the Townsend avalanche of photons hard enough to extract electrons from the cathode. These photoelectrons are found to be produced during a time  $T_{fo}$  of the order of a few  $\mu s$  when at 150 mm Hg pressure and lower when at higher pressures. The analysis of the features of excited levels of argon suggests the four lower excited levels to be responsible of the photoelectric effect. The  $T_{fo}$  values deduced from our measurements are in accordance with those obtained by extrapolating the Molnar values of the first metastable levels at the pressures used. This photoelectric process has been found to be the main responsible of the sustaining of corona discharge, which



starts at multiplication values of about 200. If carbon dioxide concentrations varying from  $5 \cdot 10^{-4}$  to  $5 \cdot 10^{-3}$  are added to argon, an increase of  $N_s$ , the threshold multiplication, is obtained, which is linear versus the carbon dioxide percentage. This fact is readily explained by assuming the quenching of argon excited levels by second kind collision on carbon dioxide molecules. From the experimental results a value of the quenching cross section may be deduced which is about  $600 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2$  in a first approximation. Further studies concern the space charge effect, at the photoelectric process divergence threshold, which allows the formation of a very short Geiger zone, at carbon dioxide concentrations over  $5 \cdot 10^{-4}$ . No processes other than the photoelectric one have been found to be efficient in counters filled with argon plus carbon dioxide mixtures up to concentration of  $5 \cdot 10^{-3}$ . At higher percentages the photoelectric process is considerably reduced; there it has been found to be effective in the discharge building-up a process by which electrons are released in the gas body. The counter behaves as a regular fast counter. The effect of mercury vapor in the discharge in pure argon is also described, which is accounted for by the well known Penning process of mercury ionization by collision on excited argon atoms. This process causes the discharge to start at extremely low multiplication values.

## On the Algorithm of Dirac Spurs.

E. R. CAIANIELLO (\*)

*Istituto di Fisica dell'Università - Torino*

S. FUBINI (\*\*)

*Istituto di Fisica del Politecnico - Torino*

(ricevuto l'11 Ottobre 1952)

**Summary.** — The spur of the product of any number of Dirac matrices is shown to be square root of a determinant. It can be evaluated directly, however, by means of rules as simple as those of determinant theory. When the number of matrices occurring in the product is  $> 12$ , further considerations show that many terms of the expansion sum up to give zero total contribution. A final formula is given which takes all such reductions into account. The Appendix contains rules for summing over pairs of  $\gamma^\mu$  which bracket products of Dirac matrices.

In most calculations of processes involving particles obeying the Dirac theory, e.g. of transition probabilities in decay processes or of cross sections in electrodynamics or meson theories, it is necessary to evaluate spurs of products of Dirac matrices. Although this is quite straightforward in principle, when the expressions become a little involved a considerable amount of computational work may be required, and with it arises the need for a careful check of the results obtained, to insure that no trivial mistakes were incurred into. It is also rather hard to visualize a priori, with the usual computational technique, what kinds of symmetries may exist among the different terms arising from a higher order calculation, say in electrodynamics.

In an attempt to improve on this situation, we show here that the evaluation of the spur of the product of any number of Dirac matrices can be

---

(\*) Now at the Institute for Theoretical Physics (CERN) University of Copenhagen Denmark (on leave from the University of Rome, Italy).

(\*\*) Now at the Istituto di Fisica dell'Università - Torino.

systematized into an algorithm closely related to, and as simple as, that of determinant theory. More precisely, formula (12) shows that the square of any such spur is a skew-symmetric determinant of even order; the spur itself, however, can be derived from a scheme alike to that of determinant theory (sect. 3).

The expanded spur is very conveniently re-expressed by (17). This formula permits to realize that remarkable simplifications arise when the order  $2n$  of the spur (i.e. the number of its factors) is  $\geq 12$ , which become the more effective the larger is  $n$ .

In actual problems, e.g. in electrodynamics, one has to sum over pairs of  $\gamma''$  which bracket products of Dirac matrices <sup>(1)</sup>. Although the present technique makes it rather easy to sum during and after the expansion of the spur, it is desirable to be able to perform the summation before. This question is considered in the Appendix.

The present work will be followed by another in which this technique is applied to the problem of summing into one compact expression all the contributions to a given process from the  $n^{\text{th}}$  order graphs of the Feynman-Dyson theory.

### 1. — Let

$$(1) \quad \gamma^\mu p_\mu^{(i)} + 1 \cdot i p_5^{(i)} = P_i, \quad (\mu = 1, 2, 3, 4)$$

be a vector matrix formed from the scalar  $p_5^{(i)}$ , the vector  $p_\mu^{(i)}$ , the unit matrix and the Dirac matrices ( $x^4 = ict$ ):

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\delta_{\mu\nu}.$$

We are interested in evaluating the spur of a product  $P_1 P_2 \dots P_m$ . To reduce  $P_1 P_2 \dots P_m$  to a form more suitable to our purposes, we rewrite it as <sup>(2)</sup>

$$(2) \quad P_1 \gamma^5 \cdot \gamma^5 P_2 \cdot P_3 \gamma^5 \cdot \gamma^5 P_4 \cdot \dots \cdot \left\{ \begin{array}{l} \cdot P_{2n-1} \gamma^5 \cdot \gamma^5 P_{2n} \\ \cdot P_{2n-1} \gamma^5 \cdot \gamma^5 \end{array} \right. ;$$

on introducing the dual representation of the  $\gamma$ -matrices

$$(3) \quad \Gamma^5 = \gamma^5 = \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4; \quad \Gamma^\mu = i\gamma^\mu \gamma^5; \quad \Gamma^\mu \Gamma^\nu + \Gamma^\nu \Gamma^\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \\ (\mu, \nu = 1, 2, \dots, 5),$$

<sup>(1)</sup> R. P. FEYNMAN: *Phys. Rev.*, **76**, 769 (1949).

<sup>(2)</sup> G. PETIAU: *Journ. de Phys.*, **12**, 565 (1951).

it is seen from (2) that any such product can be written as a products of an *even* number of matrices  $Q_h = \Gamma^\mu q_\mu^{(h)}$  ( $\mu = 1, 2, \dots, 5$ )

$$Q_1 Q_2 \dots Q_{2n},$$

where  $q_\mu^{(h)} = p_\mu^{(h)}$  ( $\mu = 1, \dots, 4$ );  $q_5^{(h)} = (-1)^h p_5^{(h)}$ . Introduce now the abbreviated notation

$$(4) \quad (1\ 2\ 3 \dots 2n) = \frac{1}{4} \text{Sp} (Q_1 Q_2 \dots Q_{2n}).$$

From

$$Q_r Q_s + Q_s Q_r = 2q_\mu^{(r)} q_\mu^{(s)} = 2(rs), \quad (\mu = 1, \dots, 5)$$

one has

$$(5) \quad (1\ 2\ 3 \dots 2n) = \sum_{k=2}^n (-1)^k (1k)(2\ 3 \dots, k-1, k+1, \dots, 2n),$$

and, finally, by recursion:

$$(6) \quad (1\ 2\ 3 \dots 2n) = \sum' (-1)^P (i_1 i_2)(i_3 i_4) \dots (i_{2n-1} i_{2n}),$$

where  $\sum'$  is defined by the prescription that the sum must be taken only on the permutations of indices satisfying the limitations

$$(7) \quad i_1 < i_2; \dots; i_{2n-1} < i_{2n}; \quad i_1 < i_3 < \dots < i_{2n-1};$$

$p$  is an integer, even or odd with the parity of the permutation  $i_1 i_2 i_3 \dots i_{2n}$ . In the following we say, for short, that the parity of a permutation of indices is  $p$ ,  $q$ , ...; relations among such parities are always understood to hold to within an arbitrary additive even integer.

Formula (6), which is the trivial extension to our five dimensional formalism of a similar expression given by DUFFIN<sup>(3)</sup>, is the starting point for the considerations of sect. 3. The whole matter is rendered more intuitive, however, by a few algebraic remarks which form the object of the next section.

2. - Introduce the  $2n$  alternating variables  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2n}$ , i.e. variables obeying the commutation relations

$$(8) \quad \xi_h \xi_k + \xi_k \xi_h = 0.$$

(3) R. J. DUFFIN: *Phys. Rev.*, **77**, 683 (1950).

Define the algebraic form

$$(9) \quad \omega = \sum_{h < k} (hk) \xi_h \xi_k = \frac{1}{2} \sum a_{hk} \xi_h \xi_k.$$

In (9), and throughout this section, the  $(hk) = (kh)$  can be any numbers; the  $a_{hk}$  are defined by the relations

$$(10) \quad a_{hk} = (hk) \eta_{hk}, \quad \eta_{hk} = \begin{cases} +1 & \text{for } h < k \\ 0 & \text{for } h = k \\ -1 & \text{for } h > k \end{cases}.$$

Then,

$$(11) \quad \omega^n = n! (1 \ 2 \dots 2n) \xi_1 \xi_2 \dots \xi_{2n} = \frac{1}{2^n} (\sum a_{hk} \xi_h \xi_k)^n.$$

((11), when the last term is expanded, yields immediately formula (14) of sect. 3). Write now

$$\omega' = \frac{1}{2} \sum a_{hk} \xi_h' \xi_k',$$

where all the variables  $\xi, \xi'$  anticommute as in (8). Then:

$$\begin{aligned} (n!)^2 (1 \ 2 \dots 2n)^2 \xi_1 \xi_2 \dots \xi_{2n} \xi_1' \xi_2' \dots \xi_{2n}' &= \frac{1}{2^{2n}} (\sum a_{hk} a_{rs} \xi_h \xi_k \xi_r' \xi_s')^n = \\ &= (n!)^2 A \xi_1 \xi_2 \dots \xi_{2n} \xi_1' \xi_2' \dots \xi_{2n}', \end{aligned}$$

with  $A = \det. (a_{hk})$ , which shows that

$$(12) \quad (1 \ 2 \dots 2n)^2 = A.$$

The fact that a skew-symmetric determinant of even order is the square of the form  $(1 \ 2 \dots 2n)$  defined by (5), (6), is quite well known; such form are named Pfaffians and their theory is about one hundred years old. In it, as we just said, the numbers  $(hk)$  are quite arbitrary. (In our case, however, they are strongly restricted by the requirement  $(hk) = q_\mu^{(h)} q_\mu^{(k)}$ , whose effectiveness will appear in the next section).

It goes without saying that (12) supplies an additional method for evaluating Dirac spurs: it states, indeed, their fundamental algebraic property. We do not insist on this point here and just confine ourselves to pointing out

a rule which permits to derive all the terms of (6) from a scheme as simple as that of determinant theory. Form the array

$$(13) \quad \left| \begin{array}{ccccccc} (12) & (13) & (14) & \dots\dots\dots & (1, 2n) \\ & (23) & (24) & \dots\dots\dots & (2, 2n) \\ & & (34) & \dots\dots\dots & (3, 2n) \\ & & & \dots\dots\dots & \\ & & & & \dots\dots\dots \\ & & & & & & (2n-1, 2n) \end{array} \right|.$$

This symbol can be regarded as representing the Pfaffian (6) if the following algorithm is connected to it:

1) each term  $(hk)$  belongs to *two* lines: line  $h$ , containing all terms with an index  $h$ , and line  $k$ , containing all terms with an index  $k$ ;

2) crossing out lines  $h$  and  $k$  reduces (13) to a new Pfaffian: the *minor* of  $(hk)$ ;

3) (13) is expanded by adding the products of all terms of a fixed line by their minors, each product taken with the sign  $(-1)^{h+k+1}$ .

Further properties of Pfaffians will be found in the mathematical literature <sup>(4)</sup>. Reference to this algorithm will help in visualizing the results of the next section.

3. — Formula (6) contains  $\sum'$ , defined by the prescription (7). This limitation can be removed by introducing the quantities  $a_{hk}$  defined by the relations (10). One readily sees then that:

$$(14) \quad (1, 2 \dots 2n) = \frac{1}{(2n)!!} \sum (-1)^p a_{i_1 i_2} a_{i_3 i_4} \dots a_{i_{2n-1} i_{2n}},$$

where we remind that  $(2n)!! = 2n(2n-2) \dots 2 = 2^n n!$  and  $(2n-1)!! = (2n)!/2^n n!$ . Instead of (7), one can evidently impose other prescriptions of the same sort. We use this freedom to give a privileged role to  $2\alpha$  out of the  $2n$  vectors  $q$ . Let

$$k_1 < k_2 < \dots < k_{2\alpha}; \quad h_1 < h_2 < \dots < h_{2\beta}, \quad (\alpha + \beta = n)$$

be a permutation  $R$  of the indices, with parity  $q$ , and let  $\sum''$  denote summation over only those permutations satisfying the limitations

$$i_1 \rightarrow i_2; \quad i_3 \rightarrow i_4; \quad \dots; \quad i_{2n-1} \rightarrow i_{2n}; \quad i_1 \rightarrow i_3 \rightarrow \dots \rightarrow i_{2n-1},$$

<sup>(9)</sup> See e.g. T. MUIR: *Contribution to the history of determinants*, 5 vols. (the last published London, 1930).



where  $i \rightarrow j$  means that  $i$  precedes  $j$  in  $R$ . (14) can then be written as:

$$(15) \quad (1 \ 2 \dots 2n) = (-1)^q \sum'' (-1)^{p'} a_{i_1 i_2} a_{i_3 i_4} a_{i_{2n-1} i_{2n}},$$

where  $p'$  means parity of  $i_1 i_2 \dots i_{2n}$  relative to  $R$  (i.e.  $p = q + p'$ : parity computed by taking  $R$  as giving the fundamental ordering). Consider now the permutation  $S$  ( $r + t = \alpha$ ;  $t + \beta = n$ ):

$$k'_1 < k'_2 < \dots < k'_{2r}; \quad k''_1 < k''_2 < \dots < k''_{2t}; \quad h''_1 < h''_2 < \dots < h''_{2t}; \quad h'_1 < h'_2 < \dots < h'_{2s},$$

where  $k'$ ,  $k''$  are a permutation of the indices  $k$ , and  $h''$ ,  $h'$  of the indices  $h$ . Let  $\sigma$  be the parity of  $S$  relative to  $R$ .  $\alpha$  being a fixed number,  $\sum''$  splits into  $\alpha + 1$  partial sums, numbered  $r = 0, 1, 2, \dots, \alpha$ , each containing all the products in which  $2r$  of the  $q_k$  combine among themselves,  $2t$  of the  $q_h$  combine with  $2t$  of the  $q_h$  and  $2s$  of the  $q_h$  combine among themselves. We can accordingly re-write (15) as

$$(16) \quad (1 \ 2 \dots 2n) = (-1)^q \sum_{r=0}^{\alpha} \sum_{C_r} (-1)^{\sigma} \sum'' (-1)^{p''} a_{k'_{i_1} k'_{i_2}} \dots a_{k'_{i_{2r-1}} k'_{i_{2r}}} \cdot \\ \cdot a_{h''_{i_1} h''_{i_2}} \dots a_{h''_{i_{2t}} h''_{i_{2t}}} \cdot a_{h'_{i_1} h'_{i_2}} \dots a_{h'_{i_{2s-1}} h'_{i_{2s}}}.$$

Here,  $p' = \sigma + p''$ ;  $k'_{i_1}, \dots, k'_{i_{2r}}$  is a permutation of  $k'_1, k'_2, \dots, k'_{2r}$ , etc.;  $\sum_{C_r}$  denotes summation over all combinations  $C_r$  which can be formed for given  $r$ . But  $p'' = \lambda + \mu + \nu$ , where  $\lambda$  is the parity of  $k'_{i_1}, k'_{i_2}, \dots, k'_{i_{2r}}$ ,  $\mu$  is the parity of  $k''_{i_1} h''_{i_1} k''_{i_2} h''_{i_2} \dots k''_{i_{2t}} h''_{i_{2t}}$  and  $\nu$  is the parity of  $h'_{i_1}, h'_{i_2}, \dots, h'_{i_{2r}}$  (relative to the order in which the same indices appear in  $R$ ). Also, from (15) or (16)

$$\sum'' (-1)^{\lambda} a_{k'_{i_1} k'_{i_2}} \dots a_{k'_{i_{2r-1}} k'_{i_{2r}}} = (k'_1 k'_2 \dots k'_{2r}),$$

$$\sum'' (-1)^{\nu} a_{h'_{i_1} h'_{i_2}} \dots a_{h'_{i_{2s-1}} h'_{i_{2s}}} = (h'_1 h'_2 \dots h'_{2s}),$$

and, denoting with  $\mu'$  the parity of  $h''_{i_1}, h''_{i_2}, \dots, h''_{i_{2r}}$  alone ( $2t^2 - t \sim t = \alpha - r$  is the number of transpositions required to separate the  $k''$  from the  $h''$ ):

$$\sum'' (-1)^{\mu} a_{k''_{i_1} h''_{i_1}} a_{k''_{i_2} h''_{i_2}} \dots a_{k''_{i_{2t}} h''_{i_{2t}}} = \sum (-1)^{t+\mu'} a_{k''_1 h''_1} \dots a_{k''_{2t} h''_{2t}} = \\ = (-1)^t \begin{vmatrix} a_{k''_1 h''_1} & \dots & a_{k''_1 h''_{2t}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k''_{2t} h''_1} & \dots & a_{k''_{2t} h''_{2t}} \end{vmatrix} = (-1)^t \begin{pmatrix} k''_1 k''_2 \dots k''_{2t} \\ h''_1 h''_2 \dots h''_{2t} \end{pmatrix},$$

the last being merely a convenient abbreviation to denote the determinant. We obtain thus

$$(1\ 2 \dots 2n) = (-1)^0 \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{c_r} (-1)^{\sigma+t} (k'_1 k'_2 \dots k'_{2r}) \begin{pmatrix} k''_1 k''_2 \dots k''_{2t} \\ h''_1 h''_2 \dots h''_{2t} \end{pmatrix} (h'_1 h'_2 \dots h'_{2s}),$$

and finally:

$$(17) \quad (1\ 2 \dots 2n) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^t \sum_{c_r} (-1)^{\tau} (k'_1 k'_2 \dots k'_{2r}) \begin{pmatrix} k''_1 k''_2 \dots k''_{2t} \\ h''_1 h''_2 \dots h''_{2t} \end{pmatrix} (h'_2 h'_3 \dots h'_{2s}),$$

where  $\tau$  is the parity of the permutation

$$k'_1 < k'_2 < \dots < k'_{2r}; \quad k''_1 < k''_2 < \dots < k''_{2t}; \quad h''_1 < h''_2 < \dots < h''_{2t}; \quad h'_1 < h'_2 < \dots < h'_{2s},$$

taken again with respect to the fundamental ordering  $1, 2, \dots, 2n$ .

The formula just obtained rests only on the commutation properties of the Dirac matrices: it is therefore valid regardless of the number of dimensions  $d$  of the space spanned by the vectors  $q$ , provided these result from a theory in which the same commutation relations hold. (One might envisage, for instance, a generalized Dirac theory with 8-component spinors functions of six coordinates, the two additional ones being charge and mass. Or one might wish to apply (17) to non-relativistic calculations, with 2-component spinors—in this case, however, it is not possible to define a 5-component vector  $q$  with the mass term as fifth component).

(17) is completely equivalent to (6); it presents, however, remarkable advantages over the latter. Consider, for instance, a standard electrodynamic calculation. Simplifications arising from energy-momentum conservation can be introduced in (17) *before* performing its explicit expansion. Furthermore, one may take as  $q_k$  the electron momentum-mass vectors and as  $q_\mu$  the vectors with all but one components equal to zero arising from the  $\gamma^\mu$  of the interactions with the photon field: this would make a subsequent summation over photon polarization quite easy.

When  $n \geq 6$  ( $= d + 1$ : we consider only the case  $d = 5$ ) the formalism introduced here permits simplifications not attainable with the customary techniques, the greater the larger is  $n$ . These result if we take as permutation  $N$  the fundamental permutation  $1, 2, \dots, 2n$ . It is convenient now to denote with  $k_1, k_2, \dots, k_{2\alpha}$  a permutation of the numbers from 1 to  $2\alpha$  such that  $k_1 < k_2 < \dots < k_{2r}; k_{2r+1} < \dots < k_{2\alpha}$  and with  $h_{2\alpha+1}, \dots, h_{2n}$  a permutation of the remaining indices such that  $h_{2\alpha+1} < \dots < h_{4\alpha-2r}; h_{4\alpha-2r+1} < \dots < h_{2n}$ . The de-

terminants appearing in (17) become with this choice simply

$$\begin{pmatrix} k_{2r+1} & k_{2r+2} & \dots & k_{2\alpha} \\ h_{2\alpha+1} & h_{2\alpha+2} & \dots & h_{4\alpha-2r} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} (k_{2r+1} h_{2\alpha+1}) \dots (k_{2r+1} h_{4\alpha-2r}) \\ \vdots \\ (k_{2\alpha+1} h_{2\alpha+1}) \dots (k_{2\alpha+1} h_{4\alpha-2r}) \end{vmatrix}.$$

But in a space with  $d$  dimensions there are at most  $d$  linearly independent vectors: it follows that, in our case, *all the determinants appearing in (17) of order six and greater vanish identically*. Only the terms with  $r = \alpha, \alpha - 1, \alpha - 2$  survive. When  $n$  is large, formula (17) must be applied reiterately; the choice of  $\alpha$  which secures the maximum reduction is  $\alpha = 3$ , at all stages (it can be shown that the best choice, for  $d$ -dimensional  $q$ , is  $(d+3)/2 > \alpha \geq (d+1)/2$ . The proof of this statement is left to the reader). The final result is therefore:

$$\begin{aligned} (18) \quad (1 \ 2 \dots 2n) &= (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6) (7 \ 8 \ 9 \dots 2n) - \\ &- \sum_{c_2} (-1)^{\tau}(k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4) \begin{pmatrix} k_5 \ k_6 \\ h_7 \ h_8 \end{pmatrix} (h_9 \ h_{10} \dots h_{2n}) + \\ &+ \sum_{c_1} (-1)^{\tau}(k_1 \ k_2) \begin{pmatrix} k_3 \ k_4 \ k_5 \ k_6 \\ h_7 \ h_8 \ h_9 \ h_{10} \end{pmatrix} (h_{11} \ h_{12} \dots h_{2n}). \end{aligned}$$

We are grateful to Prof. G. WATAGHIN for his kind interest in our work.

#### APPENDIX

Let

$$R_h = Q_1 Q_2 \dots Q_h; \quad (R_h) = \frac{1}{4} \text{Sp}(Q_1 Q_2 \dots Q_h).$$

On introducing the 16 matrices of the Dirac algebra (assumed here to be Hermitean):

$$\Gamma_\varepsilon^\alpha \equiv \{ \Gamma_1^0 = 1; \quad \Gamma_2^{\mu\nu} = i\gamma^\mu \gamma^\nu (\mu < \nu); \quad \Gamma_3^\mu = \gamma^\mu; \quad \Gamma_4^\mu = i\gamma^\mu \gamma^5; \quad \Gamma_5^0 = \gamma^5 \}$$

one has

$$(A1) \quad R_h = \sum_{\alpha, \varepsilon} (R_h \Gamma_\varepsilon^\alpha) \Gamma_\varepsilon^\alpha,$$

and also

$$(A2) \quad \tilde{R}_h = Q_h Q_{h-1} \dots Q_2 Q_1 = \sum_{\alpha, \varepsilon} (-1)^{\varepsilon+1} (R_h \Gamma_\varepsilon^\alpha) \Gamma_\varepsilon^\alpha.$$

It follows from (A1) that

$$(A3) \quad (R_h R'_h) = \sum_{\alpha, \varepsilon} (R_h \Gamma_\varepsilon^\alpha) (\Gamma_\varepsilon^\alpha R'_h).$$

This formula permits to reduce the calculation of a spur of given order to lower order problems; it can be shown to lead again to (17). From (A1) one finds immediately:

$$(A4) \quad \sum_{\mu} \gamma^\mu R_h \gamma^\mu = 4(R_h) - 2 \sum_{\varrho} (R_h \gamma^{\varrho^2}) \gamma^{\varrho^2} + 2 \sum_{\varrho} (R_h i \gamma^{\varrho^2} \gamma^5) i \gamma^{\varrho^2} \gamma^5 - 4(R_h \gamma^5) \gamma^5,$$

etc.

Relevant simplifications occur when all  $q_5^{(i)} = 0$ . It is just as well then to consider the matrices (1) directly: we are in the case usually considered. Call, to avoid confusion,  $X_i = \gamma^\mu p_\mu^{(i)}$  ( $\mu = 1, 2, 3, 4$ ) such a matrix, and let  $Y_h = X_1 X_2 \dots X_h$ . The following identities follow immediately from those reported above:

$$(A5) \quad Y_{2h} = (Y_{2h}) + \sum_{\mu < \nu} (Y_{2h} i \gamma^\mu \gamma^\nu) i \gamma^\mu \gamma^\nu + (Y_{2h} \gamma^5) \gamma^5,$$

$$(A6) \quad Y_{2h+1} = \sum_{\mu} (Y_{2h+1} \gamma^\mu) \gamma^\mu + \sum_{\mu} (Y_{2h+1} i \gamma^\mu \gamma^5) i \gamma^\mu \gamma^5,$$

$$(A7) \quad \sum_{\mu} \gamma^\mu Y_{2h} \gamma^\mu = 4(Y_{2h}) - 4(Y_{2h} \gamma^5) \gamma^5,$$

$$(A8) \quad \sum_{\mu} \gamma^\mu Y_{2h+1} \gamma^\mu = -2 \sum_{\varrho} (Y_{2h+1} \gamma^{\varrho^2}) \gamma^{\varrho^2} + 2 \sum_{\varrho} (Y_{2h+1} i \gamma^{\varrho^2} \gamma^5) i \gamma^{\varrho^2} \gamma^5 = -2 \tilde{Y}_{2h+1}.$$

(A3) results simplified accordingly: in applying it we can take either

$$Y_{2h} = Y'_{2r} Y'_{2s} \quad \text{or} \quad Y_{2h} = Y'_{2r-1} Y'_{2s+1} \quad ((Y_{2h+1}) = 0).$$

## RIASSUNTO

Si dimostra che la traccia del prodotto di un numero qualsiasi di matrici di Dirac è uguale alla radice quadrata di un determinante. Essa però può essere calcolata direttamente per mezzo di regole, tanto semplici quanto quelle della teoria dei determinanti. Se il numero delle matrici che formano il prodotto è  $\geq 12$ , molti termini dello sviluppo si elidono. Si ottiene una formula finale che tiene conto di tutte queste riduzioni. L'appendice contiene delle regole per sommare su coppie di  $\gamma^\mu$  fra le quali si trovano dei prodotti di matrici di Dirac.

## NOTE TECNICHE

### Sul funzionamento di un particolare circuito a coincidenze.

F. DEMICHELIS e R. MALVANO

*Istituto di Fisica del Politecnico - Torino*

(ricevuto il 12 Ottobre 1952)

**Riassunto.** — Si discute sulla variazione del tempo di risoluzione di un particolare circuito a coincidenze in funzione della energia dei raggi  $\gamma$  incidenti su contatori a scintillazione. Si segnala come il dispositivo permetta la misurazione dell'energia media dei raggi  $\gamma$ .

In alcune ricerche sui fenomeni di correlazione angolare  $\gamma-\gamma$  <sup>(1)</sup> si è fatto uso di un dispositivo a coincidenze il cui schema è riportato in fig. 1. Nella misurazione sperimentale del tempo di risoluzione  $\tau$  di questo dispositivo a coincidenze si è osservato il comportamento che desideriamo qui segnalare.

I due impulsi di tensione generati nei fotomoltiplicatori  $F_1$  ed  $F_2$  (931A) da una scintillazione prodottasi rispettivamente nei cristalli  $C_1$  e  $C_2$  (NaI(Tl)) vanno anzitutto a due amplificatori  $A_1$  ed  $A_2$  (fattore di amplificazione  $\approx 40$ ) e da questi giungono alle griglie di due univibratori asimmetrici costituiti da due EFF51. Questi agiscono da « formatori » degli impulsi destinati ad operare, mediante un sistema di derivazione capacitiva, sulle due griglie di un doppio triodo 6SN7, a uscita catodica, che è destinato a segnalare l'eventuale coincidenza di una coppia di impulsi. Il numeratore  $N$  registra il numero di coincidenze rivelate dal dispositivo;  $I_1$  ed  $I_2$  registrano il numero di impulsi ad unità di tempo, provenienti dai due formatori.

Il dispositivo a coincidenze trae il suo valore dalla conoscenza del suo tempo di risoluzione  $\tau$ , definito come la metà dell'intervallo di tempo entro cui devono arrivare i due impulsi perchè l'apparecchio li segnali come coincidenti.

I metodi consueti per la determinazione sperimentale di  $\tau$  in un circuito a coincidenze sono i seguenti:

1) utilizzazione di impulsi artificiali provenienti da un unico generatore elettronico di impulsi ed inviati alle due entrate del circuito a coincidenze con ritardo di tempo noto uno rispetto all'altro;

(1) F. DEMICHELIS e R. MALVANO: *Nuovo Cimento*, **9**, 1106 (1952).





Nello studio per la sua migliore messa a punto è risultato il fatto, che finora non ci sembra ancor segnalato, sebbene sia fonte di interessanti considerazioni che qui seguono, che: *nel circuito di fig. 1 il tempo di risoluzione  $\tau$ , se perfezionando la tecnica scende a valori minori di  $10^{-7}$  s, risulta funzione lineare dell'energia delle radiazioni incidenti.*

Le misurazioni sono state effettuate ripetutamente utilizzando volta a volta un diverso nuclide radioattivo. Si ebbero così tre serie di misurazioni con coppie di sorgenti costituite rispettivamente da:  $^{131}_{53}\text{I}$ ,  $^{226}_{88}\text{Ra}$  in equilibrio con i suoi sottoprodotti,  $^{60}_{27}\text{Co}$ .

Le misurazioni con il  $^{226}_{88}\text{Ra}$  sono state eseguite in tre condizioni diverse:

- a) senza assorbitore;
- b) con spessore di 0,5 cm di Pb ( $5,65 \text{ g/cm}^2$ ) tra sorgente e ricevitore;
- c) con spessore di 1 cm di Pb ( $11,3 \text{ g/cm}^2$ ).

Sicché si poteva disporre in totale di cinque determinazioni.

I nuclidi da noi utilizzati come sorgenti non emettono raggi  $\gamma$  monochromatici. Per rappresentare graficamente i valori del tempo di risoluzione  $\tau$  in funzione dell'energia  $E$  dei raggi  $\gamma$  incidenti, abbiamo preso come variabile quella che potrebbe dirsi energia media dei raggi  $\gamma$  o, meglio, il « valore baricentrico » dello spettro  $\gamma$  del nuclide in esame; esso è indicato con  $\sum n \cdot h\nu / \sum n$  nella Tabella ed è espresso in MeV come ascissa di fig. 2. Qui sono riportati i 5 punti sperimentali di cui potevamo disporre, e l'intervallo di energie era tra 0,4 e 1,3 MeV. Si nota che, entro gli errori sperimentali, contenuti entro qualche per cento, i 5 punti stanno su una retta.

Inoltre, misurando il tempo di risoluzione con diverse tensioni ai fotomoltiplicatori e utilizzando sempre la stessa sorgente,

$^{60}_{27}\text{Co}$ , si ottengono i dati di fig. 3, nella quale sono riportati i valori del tempo di risoluzione  $\tau$  in funzione della tensione  $V$  ai fotomoltiplicatori (curva I) e i valori dell'altezza  $h$  degli impulsi, il cui ammontare più probabile è

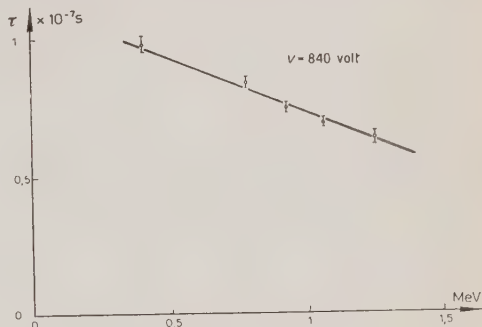


Fig. 2.

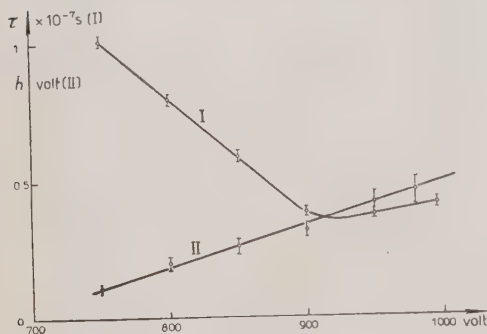


Fig. 3.

(\*) R. D. EVANS: *Nucleonics* 1, 2, 32 (Ottobre 1947).

TABELLA I.

$^{131}_{53}\text{I}$ (3)	$h\nu$	$n_0$	$\frac{\sum n \cdot h\nu}{\sum n}$												
			0,080	0,283	0,363	0,638								0,402	
$^{226}_{88}\text{Ra}$ (4)	$h\nu$		0,184	0,241	0,294	0,350	0,607	0,766	0,933	1,120	1,238	1,379	1,761	2,198	
	$n_0$		0,012	0,115	0,258	0,450	0,658	0,065	0,067	0,206	0,063	0,064	0,258	0,074	0,780
	$n_1$		0,000	0,000	0,000	0,000	0,327	0,038	0,044	0,144	0,045	0,047	0,200	0,059	0,923
	$n_2$		0,000	0,000	0,000	0,000	0,163	0,023	0,029	0,104	0,033	0,035	0,155	0,047	1,060
$^{60}_{27}\text{Co}$	$h\nu$		1,17	1,33											
	$n_0$		0,50	0,50											1,250

Le energie  $h\nu$  e  $\frac{\sum n \cdot h\nu}{\sum n}$  sono espresse in MeV .

$n_i$  rappresentano le intensità delle righe degli spettri  $\gamma$ :  $n_0$  senza assorbitore;  $n_1$  con spessore di 0.5 cm Pb tra sorgenti e ricevitori;  $n_2$  con spessore di 1 cm di Pb.

stato misurato con un oscillografo a doppio raggio, previa amplificazione lineare, in funzione della tensione  $V$  ai fotomoltiplicatori (curva II).

Per un certo intervallo dei valori della tensione ai fotomoltiplicatori, la fig. 3 mostra la linearità tra il tempo di risoluzione e la tensione e tra l'altezza degli impulsi e la tensione stessa.

I risultati di fig. 2 e, essendo noto che l'altezza degli impulsi è proporzionale all'energia dei raggi  $\gamma$  incidenti, i risultati di fig. 3 sono in accordo con il fatto che il tempo di risoluzione  $\tau$  è, entro l'intervallo da noi studiato, funzione lineare dell'energia della radiazione incidente.

Il comportamento del circuito a coincidenze in funzione dell'energia dei raggi  $\gamma$  incidenti è facilmente spiegabile tenendo conto dell'influenza che la tensione di innesco ha sul tempo di salita di un univibratore<sup>(5)</sup>. Infatti tale tempo di salita è determinato essenzialmente dalla larghezza di banda degli amplificatori di cui è costituito il circuito e dal guadagno nell'anello rigenerativo. Però questo vale solo quando la tensione di innesco è appena sufficiente ad iniziare l'azione rigenerativa; quando invece la tensione di innesco è così violenta da dominare completamente il passaggio da uno stato all'altro, il tempo di salita può risultare molto più breve.

Osserviamo che il curioso fenomeno accennato può pensarsi un inconveniente per talune utilizzazioni del circuito a coincidenze, nelle quali sarebbe comodo disporre di un apparecchio a tempo di risoluzione costante.

Non escludiamo che il fenomeno da noi segnalato sia sfuggito ad altri relatori, sia perchè non notato, sia perchè non fu spinto il tempo di risoluzione fino ai maggiori valori raggiungibili con il dispositivo utilizzato.

Ma, accanto a questo lato che potremmo dire negativo della segnalazione da noi compiuta, riteniamo di dover riconoscere anche un lato positivo.

Il dispositivo permette una rapida misura, nell'intervallo e con l'approssimazione già accennati, dell'energia media dei raggi  $\gamma$  emessi da un nuclide radioattivo.

L'energia media così determinata potrebbe essere utile nello studio delle specie radioattive aventi uno spettro  $\gamma$  complesso, e una segnalazione del dispositivo che facilmente porti a ciò ci è sembrato, perciò di un qualche interesse.

Ringraziamo vivamente il prof. E. PERUCCA per il costante interessamento e l'aiuto fornitoci.

(5) W. C. ELMORE e M. SANDS: *Electronics* (New York, 1949).

## SUMMARY

We discuss on the variation of the resolving time of a particular coincidence circuit versus the energy of  $\gamma$  rays, detected by scintillation counters. We point out how this apparatus could be used for the measurement of the average energy of  $\gamma$  rays.

# LETTERE ALLA REDAZIONE

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

## Kernphotospaltung am $B^{10}$ und $B^{11}$ durch $\gamma$ -Strahlen bis 31 MeV

R. MÜLLER und P. STOLL

*Physikalisches Institut der Eidg. Technischen Hochschule - Zürich*

(ricevuto il 17 Ottobre 1952)

Die Photoeffekte an leichten Kernen verdienen ein besonderes Interesse, weil die theoretische Deutung auf Grund der Compound-Kern-Vorstellung nicht durchwegs durchgeführt werden kann. Im speziellen Fall der untersuchten 3-Teilchen Spaltungen am  $B^{11}$  und  $B^{10}$  handelt es sich um Reaktionen, die über zwei Stufen verlaufen. In beiden Fällen kann gezeigt werden, daß vorwiegend zuerst ein angeregtes  $Be^8$  entsteht, das dann unter Alphaemission weiterzerfällt. Es besteht also die zusätzliche Möglichkeit, die verschiedenen Zustände im  $Be^8$  zu untersuchen. Das erste Teilchen, ein Triton oder ein Deuteron, kann wegen der guten Diskriminierung der Teilchen in der photographischen Platte mit Sicherheit erkannt werden. Im Gegensatz zu der Kohlenstoffspaltung ( $^{12}(\gamma, 3\alpha)^{(1-2)}$ ) können hier die Anregungsenergien ( $E^*$ -Werte) in  $Be^8$  direkt ausgerechnet werden. Folgende Reaktionen wurden mit Hilfe von Kodak-NT1-Platten mit Boreinlagerungen untersucht:

$$1: \quad B^{11} + h\nu \rightarrow H^3 + He^4 + He^4 \quad Q = 11,13 \text{ MeV},$$

$$2: \quad B^{10} + h\nu \rightarrow H^2 + He^4 + He^4 \quad Q = 5,89 \text{ MeV}.$$

Zur Auslösung der Reaktionen ist das Bremsstrahlungsspektrum eines 31 MeV Betatrons verwendet worden.

Die bisher ausgeführten Untersuchungen <sup>(1)</sup> der Reaktionen 1 und 2 wurden mit dem Spektrum der Lithiumgammastrahlung ( $E_\gamma$ : 17,6; 14,8; 12,3 MeV) durchgeführt. Die Wirkungsquerschnitte  $\sigma$  wurden für die verschiedenen Linien mit denjenigen der Kohlenstoffspaltung ( $^{12}(\gamma, 3\alpha)^{(1-2)}$ ) verglichen. Über den Reaktionsmechanismus kann gesagt werden, daß 90% der Spaltungen (1 und 2) über einen angeregten Zustand von  $Be^8$  verlaufen müssen:

$$1a: \quad B^{11}(\gamma, T) Be^{8*} \quad Be^{8*} \rightarrow He^4 + He^4,$$

$$1b: \quad B^{10}(\gamma, D) Be^{8*} \quad Be^{8*} \rightarrow He^4 + He^4.$$

<sup>(1)</sup> O. ROCHAT, P. STOLL: *Helv. Phys. Acta*, **25**, 451 (1952).

<sup>(2)</sup> H. GLÄTTLI, O. SEIPPEL e P. STOLL: *Helv. Phys. Acta*, **25**, 491 (1952).

## a) Entwicklung von Kodax-NT1-Platten mit Boreinlagerungen.

Wegen der alkalischen Wirkung von Borax sind diese Platten viele empfindlicher als gewöhnliche Emulsionen. Die Temperaturentwicklung mit Amidol bei einem pH-Wert von 7,6 gestattet die Unterscheidung der Spuren der Alphateilchen von denen, die einfach geladen sind. Eine Verwechslung mit den häufig auftretenden Kohlenstoffsternen ist deshalb ausgeschlossen.

b) Unterscheidung der Reaktionen am  $B^{11}$  und  $B^{10}$ .

Für die Trennung der möglichen Reaktionen wird das Impulskriterium verwendet. Für jeden Stern wird der Fehlervektor  $\Delta$  bestimmt.

$$\Delta = \sum_1^3 P_i \cdot P_\gamma :$$

$P_i$ : Impuls der Alpha oder einfach geladenen Teilchen (Triton, Deuton);

$P_\gamma$ : Impuls vom Gammaquant.

Die  $\Delta$ -Verteilung des gesamten Materials gibt uns ein Maß für die Auslese der Sterne. Andere 3-Teilchen Reaktionen können mit Sicherheit ausgeschlossen werden, wenn als Grenze für den zulässigen  $\Delta$ -Wert  $|\Delta| = 0,7$  angenommen wird. (Impulseinheit 1 = Impuls eines Alphateilchens von 1 MeV).

Die praktische Auswertung wird mit einer eigens dazu konstruierten Rechnermaschine, besorgt, die in einer anderen Arbeit (\*) beschrieben wird.

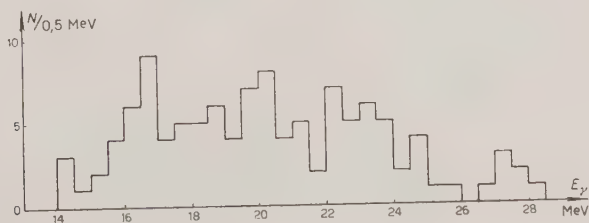
c) Wirkungsquerschnittsverlauf der Reaktion  $B^{11}(\gamma, T) 2He^4$ .

Fig. 1. — Energieverteilung von 113 Sternen Der Reaktion  $B^{11}(\gamma, T) 2He^4$

Als Eichpunkte können die beiden Wirkungsquerschnitte bei  $E_\gamma = 17,6$  und 14,8 MeV (Lithiumgammastrahlung (1)) benützt werden:

$$B^{11}(\gamma, T) 2He^4: \quad \sigma_{th\gamma = 17,6 \text{ MeV}} = (1,75 \pm 0,53) \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2.$$

(\*) *Helv. Phys. Acta* (in Publikation).

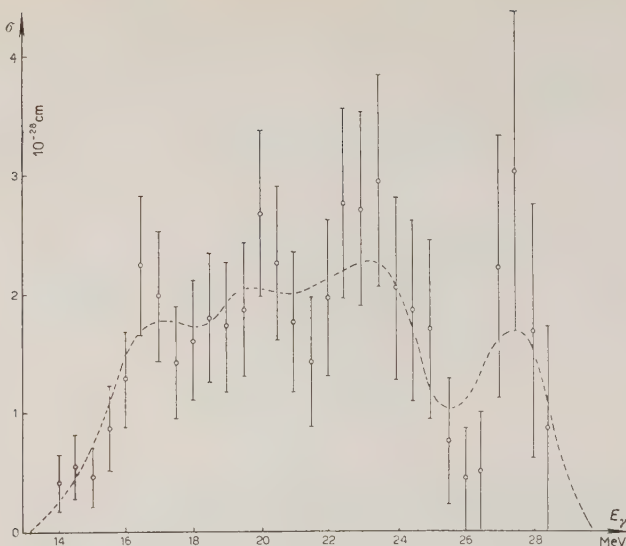


Fig. 2. - Wirkungsquerschnittsverlauf  $B^{11}(\gamma, T) 2 He^4$   
(eingezeichneter Fehler; mittlerer statistischer Fehler).

Das Verhältnis der Wirkungsquerschnitte bei den entsprechenden Quantenenergien beträgt:

$$\begin{aligned}\sigma(17,6) \\ \sigma(14,8)\end{aligned} = 3,8 \pm 0,8.$$

Dieses Verhältnis stimmt innerhalb der Fehlergrenze gut mit den Betatronmessungen (Fig. 1. und 2.) überein.

Das Betatronspektrum wurde nach SCHIFF <sup>(3)</sup> berechnet. Als weitere Korrektur bei höheren Quantenenergien kommt die Austrittswahrscheinlichkeit aus der empfindlichen photographischen Schicht dazu.

Der maximale Wirkungsquerschnitt von  $\sigma_{\max} \approx 2,5 \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2$  wird bei  $E_\gamma = 23 \text{ MeV}$  erreicht. Auffallend ist der konstante Wirkungsquerschnittverlauf von  $E_\gamma = 16 \text{ MeV}$  bis  $E_\gamma = 24 \text{ MeV}$  ( $> 2 \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2$ ). Über den steilen Wiederanstieg zu einem resonanzähnlichen Maximum bei 27,5 MeV können wegen der schwachen Statistik keine weiteren Angaben gemacht werden. Andeutungen für eine Feinstruktur der Kurve über den Wirkungsquerschnittsverlauf sind vorhanden.

#### d) Wirkungsquerschnittsverlauf der Reaktion $B^{10}(\gamma, D) 2 He^4$ .

Der Wirkungsquerschnittsverlauf weist bei 10,8 MeV ein ausgesprochenes Maximum ( $\sigma_{\max} = 1,5 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2$ ) auf. Am  $B^{10}$ -Kern ist aus anderen Messungen ein

(3) L. I. SCHIFF: *Phys. Rev.*, **70**, 87 (1946).



breites Niveau bei 10,83 MeV (4) bekannt. Das Absinken des Wirkungsquerschnittes bei  $E_\gamma > 13$  MeV kann mit dem Anstieg der Konkurrenzreaktion:  $B^{10}(\gamma, np) 2 He^4$

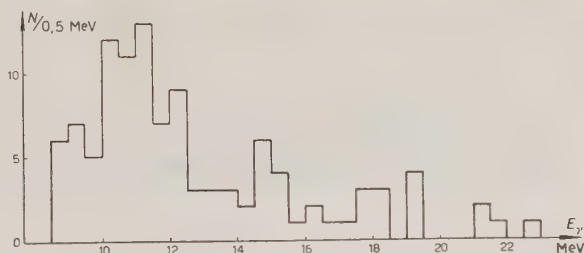


Fig. 3. - Energieverteilung von 110 Sternen der Reaktion  $B^{11}(\gamma, D) 2 He^4$ .

erklärt werden. Bei  $E_\gamma = 14,8$  MeV (Lithiumgammastrahlung (1)) beträgt  $\sigma_{14,8} = 5 \cdot 10^{-28}$  cm<sup>2</sup>. Eine zusätzliche Kontrolle ergibt sich aus der Tatsache, daß mit Hilfe des Isotopenverhältnisses  $B^{11} B^{10}$  und dem bekannten Bor-Gehalt der

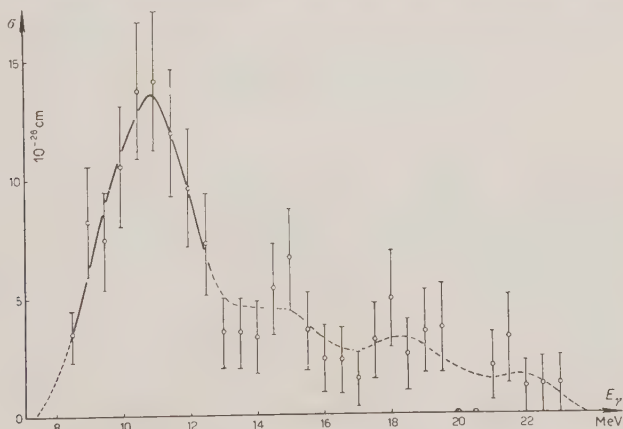


Fig. 4. - Wirkungsquerschnittsverlauf  $B^{10}(\gamma, D) 2 He^4$   
(eingezeichnete Fehler: mittlerer statistischer Fehler).

NT1-Platten aus der Anzahl der  $B^{10}$ -Sterne bei  $E_\gamma = 18,4$  MeV der Betatronplatte die Anzahl der  $B^{11}$ -Sterne der gleichen Platte bei  $E_\gamma = 17,6$  MeV berechnet werden kann.

#### e) Die Anregungszustände ( $E^*$ -Werte) des $Be^8$ .

Für das Histogramm werden die Sterne der Reaktion  $B^{11}(\gamma, T) 2 He^4$  benützt:

$$E^* = E_{\text{Total}} - 11/8 E_{\text{Triton}},$$

$E_{\text{Total}}$ : Gesamtenergie des Sternes,  
 $E_{\text{Triton}}$ : Energie des Tritons.

(4) F. AJZENBERG, T. LAURITSEN: *Energy Levels of Light Nuclei IV* (in Publikation.)

Die Verteilung der  $E^*$ -Werte ändert sich mit der Quantenenergie; so werden bei  $E_\gamma > 22$  MeV vorwiegend die  $\text{Be}^8$ -Niveaus von 4,9; 6,8 MeV und höhere ange-

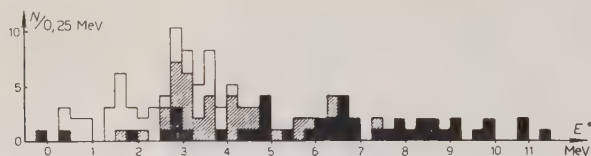


Fig. 5. —  $E^*$ : Verteilung der Reaktion  $\text{B}^{11}(\gamma, T)\text{Be}^{8*}$



$E^*$ : Anregungsenergie des  $\text{Be}^8$ -Kernes

schwarz:  $E_\gamma > 21$  MeV; strichliert:  $18 < E_\gamma < 21$  MeV; weiss:  $E_\gamma < 18$  MeV.

regt (schwarz markiert); bei  $E_\gamma > 22$  MeV, entsprechend den Ergebnissen <sup>(1)</sup> mit der Lithiumgammastrahlung, Niveaus von 2,9 und 3,4 MeV. Einige Grundzustände sind beobachtet worden; bei 17,6 MeV beträgt das Verzweigungsverhältnis:

$$\frac{\sigma(\text{Gr. Zustand})}{\sigma(\text{Total})} = 16 \pm 5\%$$

Die Änderung der Übergangswahrscheinlichkeit für die verschiedenen angeregten Zustände des  $\text{Be}^8$  bei entsprechenden Quantenenergien deutet offenbar darauf hin, daß neben der wahrscheinlichen elektrischen Quadrupol und magnetischen Dipol-Absorption der einfallenden Gammaquanten, bei größeren Energien auch die elektrische Dipol-Absorption eine wesentliche Rolle zu spielen beginnt. Eine Winkelverteilungsmessung der Tritonen (1. Teilchen) gegenüber den einfallenden Gammaquanten würde uns zusätzliches Material über den Absorptionsscharakter der Gammastrahlung liefern.

# Spettro della radiazione $\gamma$ emessa nella reazione

$$^{10}\text{B} (n, \alpha) ^7\text{Li}^*, ^7\text{Li}^* \rightarrow ^7\text{Li} + \gamma$$

A. BRACCI, U. FACCHINI e A. MALVICINI

*Laboratori CISE - Milano*

(ricevuto il 23 Ottobre 1952)

Gli spettrografi a scintillazione permettono di effettuare la misura dell'energia di radiazioni  $\gamma$  in casi in cui l'intensità di queste radiazioni sia molto debole. In particolare è accessibile a questa tecnica lo studio dei  $\gamma$  prodotti in reazioni di cattura di neutroni anche utilizzando sorgenti di neutroni molto modeste; a scopo preliminare abbiamo studiato i  $\gamma$  emessi nella reazione di cattura di neutroni lenti da parte del  $^{10}\text{B}$ , che sono già stati studiati con altra tecnica.

Lo spettrografo per raggi  $\gamma$  che abbiamo realizzato, utilizza un fototubo RCA 5819 ed un cristallo di NaI attivato con Tl <sup>(1,2,3)</sup>. Il cristallo cubico, di 1.25 cm di lato, viene accuratamente pulito e quindi posto in un piccolo recipiente metallico, chiuso con un disco di plexiglas, a tenuta d'aria allo scopo di isolarlo dall'umidità atmosferica (fig. 1). La parete interna del recipiente è resa diffondente per ottenere una buona collezione di luce sul fotocatodo ed il con-

tatto ottico fra le superfici del cristallo, del plexiglas e del fototubo è assicurato con olio di vaselina. Gli impulsi all'uscita del fotomoltiplicatore vengono ampli-

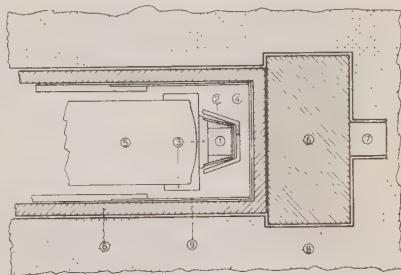


Fig. 1. — Disposizione sperimentale: 1) cristallo di NaI; 2) involucro del cristallo; 3) base di plexiglas dell'involucro; 4) boro compresso, spessore  $0,3 \text{ g cm}^{-2}$ ; 5) fotomoltiplicatore; 6) piombo; 7) sorgente di polonio-berillio; 8) paraffina; 9) scatola a tenuta di luce.

cati con un sistema lineare e inviati ad un analizzatore di ampiezza a 99 canali.

La fig. 2 mostra lo spettro delle radiazioni  $\gamma$  ed X emesse nel decadimento del  $^{198}\text{Au}$  e più precisamente la riga  $\gamma$  di 411 keV e la riga X di 70 keV del

<sup>(1)</sup> R. B., HOFSTADTER e J. A. MCINTYRE: *Nucleonics*, **7**, 32 (1950).

<sup>(2)</sup> V. O. ERIKSEN, S. JENSEN e A. SUNDE: *Physica*, **18**, 91 (1952).

<sup>(3)</sup> S. JOHANSSON: *Ark. för Fysik*, **3**, 533 (1952).

$^{198}\text{Hg}$ , come ottenuti dal nostro spettrografo.

La sorgente è in questo caso costi-

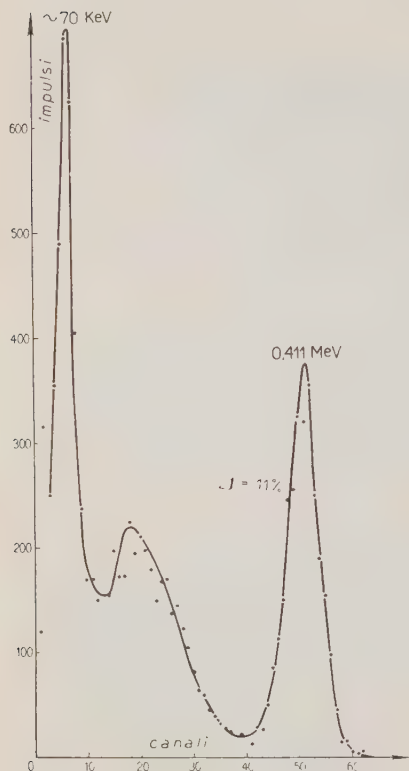


Fig. 2. - Spettro delle radiazioni  $\gamma$  ed X emesse nel decadimento del  $^{198}\text{Au}$ . La riga a 0,411 MeV è emessa dal nucleo eccitato di  $^{198}\text{Hg}$ , mentre la riga X è successiva alla conversione interna dei  $\gamma$  di 0,411 MeV.

tuita da una lamina di Au attivato con neutroni, posta direttamente sopra l'involucro del cristallo. Lo spessore di questo è sufficiente ad assorbire la radiazione  $\beta^-$  emessa dal  $^{198}\text{Au}$ .

La fig. 3 mostra la taratura dello spettrografo riguardo alla misura di energia.

Questa misura è stata fatta utilizzando le righe di decadimento del  $^{198}\text{Au}$  e del  $^{60}\text{Co}$  che sono molto ben conosciute (4). La linearità è buona entro il 2 %.

Il fondo dell'insieme cristallo-fototubo è fatto di impulsi di ampiezza corrispondente a circa 20 keV.

Il dispositivo usato per la misura dei  $\gamma$  emessi nel processo di cattura di neutroni lenti dal boro è illustrato nella fig. 1.

La sorgente di neutroni è costituita da 15 mC di polonio mescolati con berillio in polvere. Questo tipo di sorgente ha il vantaggio di presentare una poco intensa radiazione  $\gamma$  emessa direttamente dalla sorgente. Il cristallo è protetto da questa radiazione ( $\gamma$  del polonio e  $\gamma$  della reazione  $\alpha + \text{Be}$ ) per mezzo di uno spessore di piombo di 5 cm. Il cristallo è pure protetto con piombo dai  $\gamma$  emessi dai processi di cattura di neutroni nella paraffina.

La disposizione a cavità in paraffina

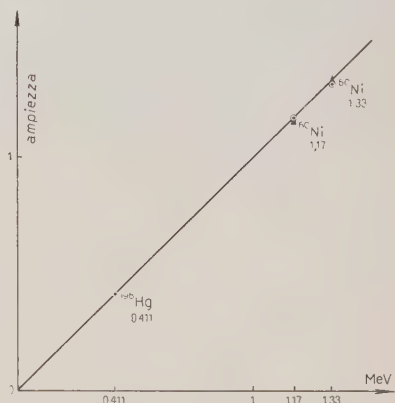


Fig. 3. - Curva di taratura dello spettrografo. La riga 0,411 MeV proviene dal decadimento del  $^{198}\text{Au}$  e quelle a 1,17 e 1,33 MeV dal decadimento del  $^{60}\text{Co}$ . La linearità è buona entro il 2 %.

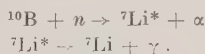
(4) D. LIND, A. HEDGRAN: *Ark. för Fysik*, 5, 29 (1952).

permette di ottenere un buon flusso di neutroni nella zona vicino al cristallo.

Uno strato di boro di  $0,3 \text{ g cm}^{-2}$  avvolge l'involucro del cristallo. In questo modo i neutroni catturati nel boro producono la reazione in studio e nello stesso tempo, a causa del grande assorbimento dello strato di boro, non penetrano nel cristallo dove, catturati dallo iodio, produrrebbero radiazioni  $\beta^-$  e  $\gamma$  di disturbo.

Uno spettro ottenuto con il dispositivo illustrato è mostrato nella fig. 4.

La riga corrispondente a  $0,477 \text{ MeV}$  è dovuta al decadimento dei nuclei di  ${}^7\text{Li}$  eccitati formati, come è noto, secondo la reazione



Nel 93% dei casi di cattura di neutrone si ha formazione di nuclei di  ${}^7\text{Li}$  eccitati, mentre nei restanti si hanno nuclei finali nello stato fondamentale <sup>(5)</sup>. La media su 6 determinazioni ha dato per l'energia dei  $\gamma$  il valore  $0,477 \text{ MeV}$  con il 2% di errore, in buon accordo con i valori noti della posizione del livello del  ${}^7\text{Li}$  e con l'unica misura diretta dell'energia dei  $\gamma$  fatta utilizzando una pila ed uno spettrografo magnetico <sup>(5,6)</sup>.

<sup>(5)</sup> W. F. HORNIAK, T. LAURITSEN, P. MORRISON e W. A. FOWLER: *Rev. Mod. Phys.*, **22**, 291 (1950).

<sup>(6)</sup> L. S. ELLIOT e R. E. BELL: *Phys. Rev.*, **74**, 1869 (1948).

La riga a circa  $70 \text{ keV}$  corrisponde a radiazioni X emesse dal piombo in seguito ad effetti fotoelettrici provocati in esso da  $\gamma$  di varia origine.

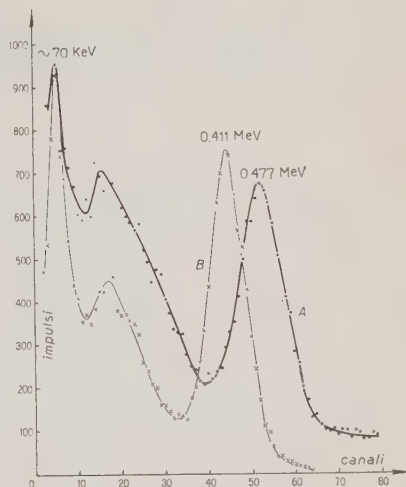


Fig. 4. — A) Spettro ottenuto con la disposizione di fig. 1. La riga a  $0,477 \text{ MeV}$  proviene dai nuclei di  ${}^7\text{Li}$  formati a seguito della cattura di neutroni nel boro. La riga X a  $\sim 70 \text{ keV}$  proviene da atomi di piombo che subiscono ionizzazione nelle orbite interne da parte dei raggi  $\gamma$  provenienti dalla sorgente o prodotti dai neutroni in vari processi. B) Spettro del  ${}^{198}\text{Au}$  per taratura.

Ringraziamo il prof. G. BOLLA per le stimolanti discussioni.

## Equivalenza fisica dell'equazione di Dirac-Corben con l'equazione di Dirac.

E. BELLOMO e A. LOINGER

*Istituto di Fisica dell'Università - Pavia*

(ricevuto il 28 Ottobre 1952)

Uno di noi <sup>(1)</sup> ha mostrato recentemente che le soluzioni dell'equazione <sup>(2)</sup>

$$(1) \quad (c \varrho_1 \sigma_k \pi_k + e A_0 + \varrho_2 m c^2 + \varrho_3 m_0 c^2) \psi = i \hbar (\partial \psi / \partial t)$$

che era stata detta di Dirac-Corben, si possono ottenere delle soluzioni dell'equazione di Dirac

$$(2) \quad (c \varrho_1 \sigma_k \pi_k + e A_0 + \varrho_3 m c^2) \psi_D = i \hbar (\partial \psi_D / \partial t),$$

(dove  $m$  è la massa della particella, legata ad  $m_c$ ,  $m_0$  dalla  $m = (m_c^2 + m_0^2)^{1/2}$ ) mediante la formula

$$\psi = \left( \frac{m + m_0}{2m} \right)^{1/2} \left( 1 + i \frac{m_c}{m + m_0} \varrho_1 \right) \psi_D \equiv U \psi_D,$$

con  $\psi$  e  $\psi_D$  normalizzate ad 1.

Vogliamo ora far vedere un più stretto legame tra la (1) e la (2).

La (1) si può scrivere

$$\left[ c \varrho_1 \sigma_k \pi_k + e A_0 + \frac{1}{m} (\varrho_2 m_c + \varrho_3 m_0) m c^2 \right] \psi = i \hbar (\partial \psi / \partial t)$$

Poichè il valore fisico degli operatori  $\varrho_k$ ,  $\sigma_k$  dipende esclusivamente dalla loro posizione in un'equazione del tipo (2) e dalle loro proprietà di commutazione, ne viene necessariamente che  $\varrho'_3 = (1/m)(\varrho_2 m_c + \varrho_3 m_0)$  è l'equivalente fisico di  $\varrho_3 \equiv \beta$ . Ne consegue che nella teoria di Dirac-Corben ad ogni osservabile si deve far corrispondere un operatore, la cui espressione è la stessa di quella della teoria di Dirac

<sup>(1)</sup> A. LOINGER: *Nuovo Cimento*, **9**, 855 (1952).

<sup>(2)</sup> H. C. CORBEN: *Nuovo Cimento*, **9**, 591 (1952).



se in quest'ultima esso non contiene  $\beta$ ; se invece contiene  $\beta$  deve farsi la sostituzione  $\beta \rightarrow \varrho'_3$ . Ad esempio, l'operatore del momento intrinseco di dipolo elettromagnetico che in notazioni non covarianti ha la forma  $i\alpha_j\alpha_k\beta$ ,  $\alpha_j\beta$  deve essere mutato in  $i\alpha_j\alpha_k\varrho'_3$ ,  $\alpha_j\varrho'_3$  <sup>(3)</sup>.

Si osservi che eseguendo sugli operatori  $\mathcal{O}$  e sulla  $\psi_D$  della (2) la trasformazione unitaria  $\mathcal{O}' = U\mathcal{O}U^{-1}$ ,  $\psi'_D = U\psi_D$  la  $\beta$  si muta in  $\varrho'_3$  e si ottiene la (1) con  $\psi = \psi'_D$  <sup>(4)</sup>.

Pertanto la teoria basata sulla (1) può considerarsi una rappresentazione, un po' diversa dall'usuale, della teoria di Dirac: *tutte le conseguenze fisiche della (1) coincidono dunque con quelle della (2)* (\*).

<sup>(3)</sup> Il non fare questa sostituzione porterebbe in questo caso all'esistenza anche di un momento elettrico di dipolo per una particella libera a impulso cinetico nullo. L'aggiunta nell'equazione (1) di un termine di Pauli (come, ad es., è stato fatto da P. CALDIROLA e P. GULMANELLI in *Nuovo Cimento*, **9**, 834 (1952)) soddisfa ai requisiti dell'invarianza relativistica ed è, per quanto detto, non equivalente all'aggiungere lo stesso termine all'equazione di Dirac (2). Tale termine può infatti scriversi:

$$-\lambda \varrho_k(\varrho_k E_k + \varrho_3 B_k) = -\lambda \sigma_k 1/m \{m_e(\varrho'_k E_k + \varrho'_3 B_k) + m_c(\varrho'_3 E_k - \varrho'_k B_k)\};$$

il termine in  $m_c/m$  è legato all'esistenza di un momento elettrico anormale a riposo.

<sup>(4)</sup> Si noti che  $U$  commuta con tutti i  $\varrho_k$ ,  $\sigma_k$  ad eccezione che con  $\varrho_3$ ,  $\sigma_3$ .

<sup>(\*)</sup> Il prof. CORBEN ci ha fatto osservare che, da quanto sopra, «segue che si può separare arbitrariamente la massa della particella in due parti ( $m_e$ ;  $m_c$ ) scalare e pseudoscalare rispettivamente», richiamando una particolare attenzione sull'esistenza di una certa libertà nella formulazione della teoria di Dirac.

Ringraziamo il prof. CORBEN della cortesia e dell'interessamento che ci ha dimostrato.

## Un caso d'invecchiamento di scintillatori liquidi.

M. AGENO, G. CORTELLESA e R. QUERZOLI

*Istituto Superiore di Sanità, Laboratorio di Fisica - Roma.*

(ricevuto il 5 Novembre 1952)

È cosa ben nota che non c'è molto accordo tra i dati dei diversi Autori relativi all'andamento del potere fluorescente con la concentrazione, nel caso di soluzioni utilizzabili come scintillatori liquidi. Questa mancanza di accordo viene generalmente attribuita al diverso grado di purezza dei solventi e dei soluti adoperati, dato che, come ha dimostrato KALLMANN, basta l'aggiunta di piccolissime quantità di un secondo soluto opportunamente scelto per modificare completamente la curva di fluorescenza.

Particolarmente notevole è tuttavia il disaccordo, nel caso delle soluzioni di naftalina in xilolo, studiate da noi <sup>(1)</sup> nel 1949, ristudiate da KALLMANN <sup>(2)</sup> nel 1950-51 e dalla CICCONE <sup>(3)</sup> nel 1952. Mentre infatti la nostra curva (dopo la rapida salita iniziale) continua costantemente a crescere linearmente fino alla concentrazione massima di 170 g/l, le curve di Kallmann decrescono dopo aver raggiunto un massimo e quella della Ciccone mostra un potere fluorescente costante, indipendente dalla concentrazione.

Per chiarire la causa di questo disac-

cordo qualitativo, abbiamo preparato una serie di soluzioni di naftalina in xilolo, con naftalina bicristallizzata da soluzione alcoolica (p.f. 80 °C) e xilolo puro per analisi della ditta C. Erba di Milano. Abbiamo conservato tali soluzioni in bot-

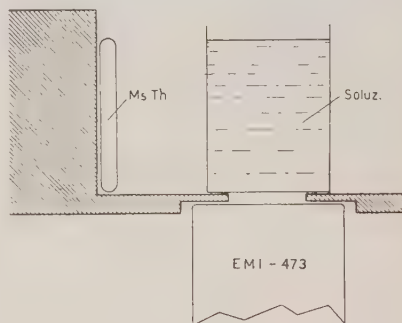


Fig. 1.

tiglie di vetro con tappo di sughero e in normale ambiente di laboratorio, per circa dieci mesi, misurandone a intervalli di tempo il potere fluorescente. Le misure sono state fatte nelle condizioni geometriche della fig. 1, usando per eccitare le scintillazioni una sorgente di raggi  $\gamma$  costituita da un preparato di MsTh di circa 10 mC, e misurando la fluorescenza con un fotomoltiplicatore

<sup>(1)</sup> M. AGENO, M. CHIOZZOTTO e R. QUERZOLI: *Rend. Acc. Lincei*, **6**, 626 (1949); *Phys. Rev.*, **79**, 720 (1950).

<sup>(2)</sup> H. KALLMANN e M. FÜRST: *Phys. Rev.*, **79**, 857 (1950); **81**, 853 (1951).

<sup>(3)</sup> A. CICCONE: *Nuovo Cimento*, **9**, 36 (1952).

EMI 473 a temperatura ambiente, connesso ad un elettrometro con resistenza di fuga.

Come è mostrato nella fig. 2, la curva

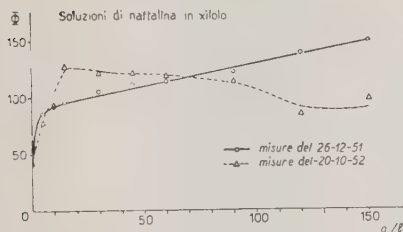


Fig. 2.

di fluorescenza ottenuta subito dopo la preparazione delle soluzioni coincide praticamente con quella da noi ottenuta nel 1949, pur essendo il dispositivo sperimentale completamente diverso. La curva ottenuta dopo dieci mesi ha invece un andamento assai simile a quello ottenuto da KALLMANN nel suo primo lavoro. È da notare che le irregolarità nell'andamento di questa seconda curva sono reali e non dovute ad errori nella

misura della fluorescenza, come se il processo di invecchiamento avesse proceduto in modo abbastanza irregolare e diverso da soluzione a soluzione. Risultati del tutto analoghi si sono ottenuti con altra serie di soluzioni preparate con naftalina commerciale.

È da notare che le soluzioni a concentrazione maggiore hanno assunto col tempo una leggera colorazione giallina e che, svaporata parte della soluzione a 150 g/l, si è ottenuto un residuo di p.f. 74 °C. Si tratta quindi certamente di un'alterazione di natura chimica, che può essere dovuta o alla formazione di prodotti di ossidazione o a lenta reazione della naftalina con impurezze originariamente contenute nello xilolo, forse sotto l'azione della luce.

Crediamo comunque non inutile segnalare il fatto, che può, a nostro avviso, spiegare l'origine del disaccordo di cui abbiamo parlato all'inizio, anche per l'interesse che può presentare nei riguardi dei contatori a scintillazione a liquidi, non essendo escluso che fatti analoghi si possano verificare con altre soluzioni scintillanti.

## Slow Heavy Mesons from Cosmic Ray Stars.

R. LEVI SETTI

*Istituto di Scienze Fisiche dell'Università - Milano  
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - Sezione di Milano*

G. TOMASINI

*Istituto di Fisica dell'Università - Genova*

(ricevuto l'8 Novembre 1952)

Two stars have been observed, in plates exposed at a maximum altitude of about 90 000 feet, showing the ejection of a slow heavy meson which, after being brought to rest in the emulsion, disintegrates with the emission of one charged secondary particle.

The plates were Ilford G5, of 1200  $\mu$  and 600  $\mu$  thickness, respectively; they have been exposed in the stratosphere by means of balloon launchings from Cagliari, in the course of the scientific expedition which took place there during the summer 1952, as a collaboration between the University of Bristol, the Centre de Physique Nucléaire of Brussels, the Italian Universities, other European laboratories and the Italian Navy and Air Force.

Both stars occurred in heavy nuclei of the emulsion. The events are partially shown in the photomicrographs of fig. 1 and 2; in the following they will be called as event N. 1 and N. 2.

*Event N. 1* (fig. 1). — The star has 38 visible prongs, 13 of which are

black, 10 grey and 15 at minimum ionization. The star primary is most likely an  $\alpha$  particle. The heavy meson is ejected in the backward direction, at an angle of about  $80^\circ$  to the primary, it stops in the emulsion after a path of 5260  $\mu$  and decays into a fast secondary particle 450  $\mu$  long. An accurate direct measurement of the mass of the particle has been possible. The mass has been determined by scattering-range and by gap-range measurements.

The method employed for scattering-range determination of mass is that described by GOLDSCHMIDT *et al.* <sup>(1)</sup>: the track has been divided into segments, the scattering measured with constant cell length for each segment, beginning with short cells in the segments nearest the slow end of the track and increasing the cell length going toward the fast end.

<sup>(1)</sup> Y. GOLDSCHMIDT-CLERMONT, G. W. KING, H. MUIRHEAD and D. M. RITSON: *Proc. Phys. Soc.* **61**, 183 (1948); Y. GOLDSCHMIDT-CLERMONT: *Nuovo Cimento*, **7**, 331 (1950).

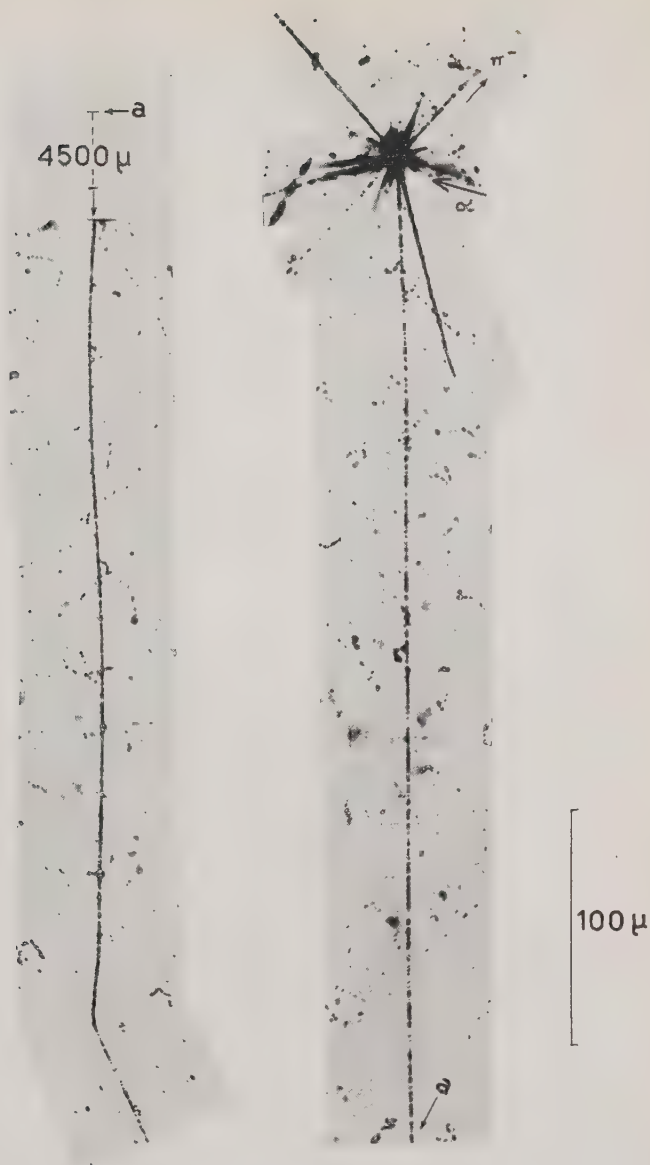


Fig. 1. - A heavy meson of mass  $1040 \pm 90 m_c$  is ejected by a star and decays into a charged secondary particle. (Observed by R. LEVI SETTI).

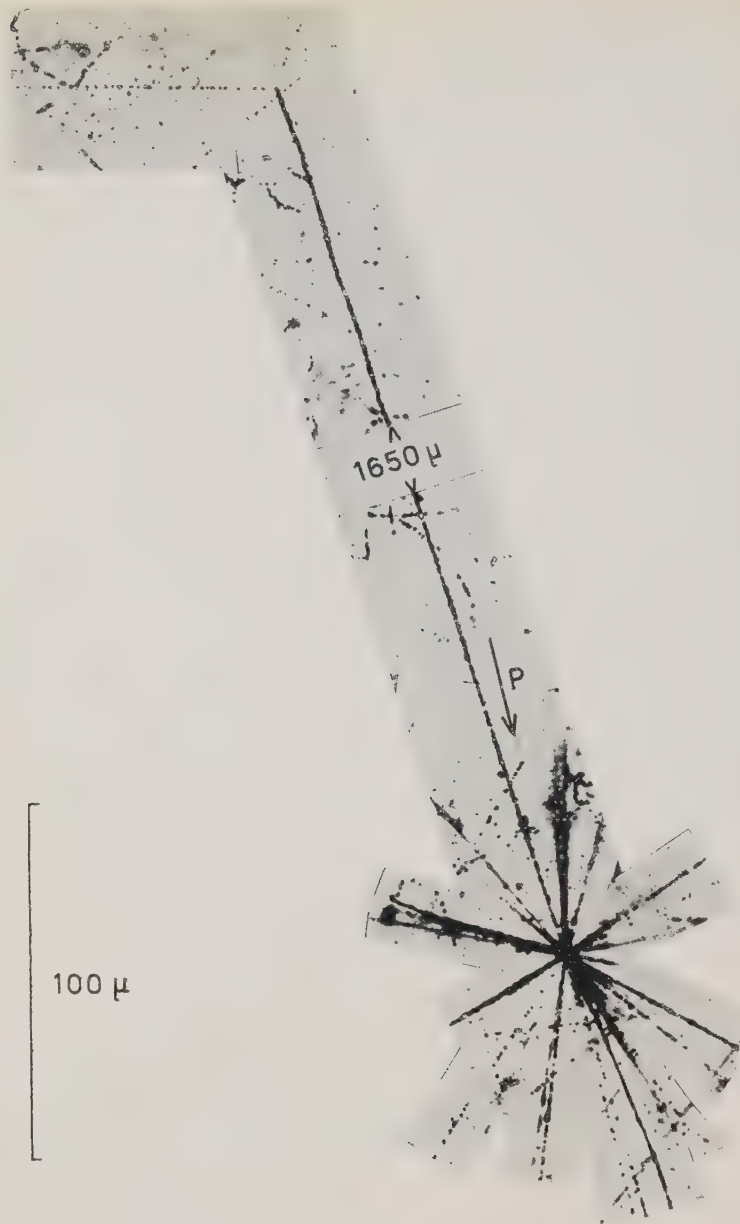


Fig. 2. - A heavy meson of mass  $1380 \pm 210 m_e$  is ejected by a star and decays into a charged secondary particle. (Observed by G. TOMASINI).



The mass was determined for each segment by taking into account the variation of energy with residual range and finally a weighted mean was taken. The cell length has been varied in a way such as to keep about constant the signal to noise ratio and chosen to be the optimum cell.

Angular and coordinate measurements were made, the value of the mass has been found to be  $1030 \pm 120 m_e$  as a mean of several determinations.

The mass has also been determined by gap-length measurements using a method due to one of us (R. L. S), the " $\alpha$  method". The total gap length per unit length is determined by means of an ocular micrometer with movable thread on a minimum ionization  $\alpha$  particle. An  $\alpha$  particle, primary of a high energy star, satisfies this requirement. This furnishes a calibration of the plate at a ratio  $I/I_0 = 4$ , on a track of constant gap-density. Such a measure will define a  $45^\circ$  straight line in doublelog paper if the total gap length is plotted against range. The same gap measurement is made on the unknown track and the result plotted. The intersection of the straight line given by the latter measurement with the  $45^\circ$  line defines the range where the unknown particle has an ionization equal to 4 times the minimum value. The mass is then simply calculated. This method yielded for the particle in question a mass of  $1050 \pm 140 m_e$ . The error on the mass can be reduced by taking the mean of the two independent determinations and the result is:  $1040 \pm 90 m_e$ .

The secondary particle has a grain density indistinguishable from the minimum,  $G/G_0 = 1.15 \pm 0.15$ . We considered that, owing to the dip and insufficient length available, the scattering measurements we have made and which give a lower limit of 80 MeV/c for the  $p\beta$ , are not trustworthy. However the mass of the primary particle and the observed specific ionization

of the secondary, require that this latter has a mass inferior to  $400 m_e$ .

The energy of emission of the described heavy meson, in the laboratory system, is about 28 MeV; the lower limit of its lifetime can be determined and results to be about  $10^{-10}$  s. The star shows also, may be as a coincidence, the emission of a slow  $\pi^-$  meson of 2.4 MeV energy, ending with a blob, at an angle to the primary symmetrical to that of emission of the heavy meson.

*Event N. 2* (fig. 2). — The star has a total of 40 branches, respectively 25 of evaporation, 3 grey and 11 shower particles; the primary is most probably a charge 1 particle, indicated as *P* in fig. 2. The ejection of the heavy meson occurs also in this case in the backward direction, at an angle of  $16^\circ$  to the probable primary; the particle ends in the emulsion after  $1885 \mu$  and decays into a secondary,  $840 \mu$  long. Scattering-range determination of the mass, as described above, together with gap measurements give a value of  $1380 \pm 210 m_e$ . The increased track length of the secondary particle of this meson, in comparison with the secondary of event N. 1, allows a tentative  $p\beta$  determination to be made by scattering. Several measurements give a value of  $100 \pm 15$  MeV/c. We consider that the error on this figure can be greater than the statistical one. Also this secondary is at minimum ionization,  $G/G_0 = 1.03 \pm 0.5$ . Its mass can be assumed to be probably less than  $300 m_e$ . The energy of emission of the heavy meson is about 18 MeV, the lifetime is greater than  $5 \cdot 10^{-11}$  s. Some considerations on the energy involved in the two parent stars follow.

Further measurements are in progress on some of the shower particles ejected by the two stars, the energy of the incident particles cannot be, however, directly measured owing to the insufficient length of the tracks. A rough estimate

of the lower limit of this energy can be attempted from considerations in the *C*-system; an energy of about 2 GeV is at least required for each shower meson produced, giving a value of the order of 30 GeV for the  $\alpha$  particle primary of the event N. 1, about 25 GeV for the primary of event N. 2. An estimate of the primary energy from the angular distribution of the shower particles has not been attempted, since the events are complex, giving evidence for secondary processes inside the nucleus; in fact there is a large spread in the angles of emission of the shower particles, some of them being ejected in the backward direction, and a large number of heavily ionizing particles is also present. By considering the relation between the average multiplicity of shower particles and the primary energy, as shown by CAMERINI *et al.* <sup>(2)</sup>, one gets a probable value of the order of 50 GeV for the primary of star N. 1 and of about 45 GeV for star N. 2. Since the primary of star N. 1 is an  $\alpha$  particle, it follows that both mesons have been produced in nucleon-nucleus collisions at an energy inferior than 50 GeV. This conclusion however must be regarded as only tentative.

Data on the production of heavy mesons in high energy nuclear interactions have been reported by DANIEL *et al.* <sup>(3)</sup>, with regard to fast particles identification. From these observations it results that in stars accompanied by the emission of large number of heavy prongs, the production of heavy mesons must be very low at energies inferior to about 50 GeV.

The results of the measurements on the two events described here are collected in the following table I.

TABLE I.  
*Heavy mesons.*

	Event N. 1	Event N. 2
Range	5 260 $\mu$	1 885 $\mu$
mass	1 040 $\pm$ 90 $m_e$	1 380 $\pm$ 210 $m_e$
lifetime	$> 10^{-10}$ s	$> 5 \cdot 10^{-11}$ s

*Secondary particles.*

	Event N. 1	Event N. 2
Length	450 $\mu$	840 $\mu$
$G/G_0$	1.15 $\pm$ 0.15	1.03 $\pm$ 0.05
$p\beta$	?	100 $\pm$ 15 MeV/c
mass	$< 400 m_e$	$< 300 m_e$

Observations on the decay at rest of heavy charged mesons coming from outside the emulsion, into a single visible secondary, in the photographic plate, have been described by O'CEALLAIGH <sup>(4)</sup>, more recently by POWELL <sup>(5)</sup>. The results of these authors show the probable existence of two types of heavy particles, the  $\alpha$  meson, of mass around 1 050  $m_e$ , decaying into a  $\mu$  meson and more than one neutral particle, and the  $\chi$  meson, of mass around 1 450  $m_e$ , decaying into a  $\pi$  meson and probably a single neutral particle.

Production and subsequent decay at rest of slow heavy mesons (S particle) has been up to now observed in some cloud chamber photographs by BRIDGE

<sup>(2)</sup> U. CAMERINI, J. H. DAVIES, C. FRANZINETTI, W. O. LOCK, D. H. PERKINS and G. YERUTIELI: *Phil. Mag.*, **42**, 1261 (1951).

<sup>(3)</sup> R. R. DANIEL, J. H. DAVIES, J. H. MULVEY and D. H. PERKINS: *Phil. Mag.*, **43**, 753 (1952).

<sup>(4)</sup> C. O'CEALLAIGH: *Phil. Mag.*, **42**, 1032 (1951).

<sup>(5)</sup> C. F. POWELL: *Köbenhavn Conference*, 1952.

and ANNIS <sup>(6)</sup> and by ANNIS *et al.* <sup>(7)</sup>; the behaviour of charged heavy mesons, called  $V^\pm$  particles, has been described by ARMENTEROS *et al.* <sup>(8)</sup>.

Our measurements show that heavy

mesons can be directly produced in stars; the evidence given by the mass measurements on the  $V$  like phenomenon N. 1 allows us to consider this event as belonging to a ( $S_\pi$ )-class; whereas event N. 2 seems to fall into a class ( $S_\chi$ ). However, this attribution is less certain that in the event N. 1, owing to the shorter track. If a decay into two particles is assumed, the second event, although with uncertainty, seems to indicate that the neutral particle ejected in the disintegration ought to be a heavy neutral meson  $V_2^0$  of mass around  $800 m_e$ .

<sup>(6)</sup> H. S. BRIDGE and M. ANNIS: *Phys. Rev.*, **82**, 445 (1951).

<sup>(7)</sup> M. ANNIS, H. BRIDGE, H. COURANT, S. OLBERT and B. ROSSI: *Nuovo Cimento*, **9**, 624 (1952).

<sup>(8)</sup> R. ARMENTEROS, K. H. BARKER, C. C. BUTLER, A. CACHON and A. H. CHAPMAN: *Nature*, **167**, 501 (1951); R. ARMENTEROS, K. H. BARKER, C. C. BUTLER, A. CACHON and C. M. YORK, *Phil. Mag.*, **43**, 597 (1952).

## Anomalies of the absorption curve of Cosmic radiation in lead.

M. ABD EL-WAHAB KHALIL

*Physics Department, Faculty of Science University - Alexandria, (Egypt).*

(ricevuto il 9 Novembre 1952)

Many authors, investigating the absorption of the vertical component of cosmic radiation in lead by a Geiger-Müller counter telescope, found small anomalies in the absorption curve <sup>(1,2,3,4)</sup>, while others denied these changes of absorption <sup>(5)</sup>.

It was said that there is a relation between these anomalies in the absorption curve and the maxima observed in the transition curve of Rossi.

First GEORGE and APPAPILLAI <sup>(1)</sup> found in 1945 at sea-level (London and Colombo) that the absorption curve showed a plateau at about 10 cm lead, and a small anomaly between 15 and 20 cm.

KELLERMANN and WESTERMAN <sup>(2)</sup> using a method which avoided largely the influence of scattering have investigated the change of absorption found by them in the region of 12 cm Pb. A

specific change of the absorption coefficient was found also in the 22 cm Pb region. They interpreted the first change as due solely to the overlapping of the high momenta end of the electron spectrum and of the meson spectrum.

Repeating the experiment of GEORGE and APPAPILLAI in Budapest, and eliminating barometric and temperature effects, FENYVES and HAIMAN <sup>(3)</sup> found a second anomaly at 26.6 cm lead beside that mentioned by GEORGE and APPAPILLAI. The first anomaly was smaller than the standard deviation, while the second was 2.5 times greater.

DE MATHOV <sup>(4)</sup> in 1951 has found a maximum of intensity under 13 cm lead + 30 cm concrete roof.

In the same year HEYLAND and DUNCANSON <sup>(5)</sup> reported that the intensity of cosmic radiation decreased continuously with increasing thickness of the absorber over a range of 30 cm lead.

Repeating the experiment in Alexandria - Egypt (latitude 31°2 N, longitude 29°9, geomagnetic latitude 28°5 N), I have found a third anomaly at 37.5 cm Pb beside those at 15 cm and 27.5 cm Pb.

Using a counter telescope of four tubes, the top and the bottom tubes being 90.5 cm apart, each counter tube of effective length 60 cm, diameter 4 cm,

<sup>(1)</sup> E. P. GEORGE and V. APPAPILLAI: *Nature*, **155**, 726 (1945).

<sup>(2)</sup> E. W. KELLERMANN and K. WESTERMAN: *Proc. Phys. Soc., A* **62**, 354 (1949).

<sup>(3)</sup> E. FENYVES and O. HAIMAN: *Nature*, **165**, 244 (1950).

<sup>(4)</sup> E. MAZZOLLI DE MATHOV: *Nature*, **167**, 192 (1951).

<sup>(5)</sup> G. R. HEYLAND and W. E. DUNCANSON: *Nature*, **167**, 895 (1951).

a fourfold coincidence was established with a Rossi's circuit of resolving power of  $10^{-5}$  s. The curve obtained is shown in fig 1. From this curve we noticed that:

1) The 2 first anomalies at 15 and 27.5 cm lead are just within the standard deviation of our measurement until today.

2) The absorption curve for the soft component of cosmic radiation is in coincidence with that made by FENYVES and HAIMANN.

3) Making the experiment on the roof under 3 mm aluminium and downstairs under a thickness of 40 cm concrete, it was noticed that these anomalies are more distinguished downstairs, the same as in the case of maxima of Rossi's transition curve.

It should be mentioned here that this work is an extension to our <sup>(6)</sup> work in (1951) on the maxima found at about 15.25 and 37.5 cm Pb of Rossi's transition curve.

The second and the third maxima of Rossi's curve were also found by many authors like CLAY <sup>(7)</sup>, BOTHE and THURN <sup>(8)</sup>, CHAUDHURY <sup>(9)</sup> and KAMEDA-MIURA <sup>(10)</sup>.

This paper confirms the relationship between the anomalies of the absorption curve and the maxima found in the transition curve.

It also confirms the existence of a fourth maximum at about 37.5 cm Pb which till now is only found by us.

<sup>(6)</sup> L. ALLEGRETTI e M. ABD EL-WAHAB KHALIL: *Nuovo Cimento*, **8**, 1011 (1951).

<sup>(7)</sup> J. CLAY and W. L. SCHEEN: *Physica*, **14**, 489 (1948).

<sup>(8)</sup> W. BOTHE and H. THURN: *Phys. Rev.*, **79**, 545 (1951).

<sup>(9)</sup> P. H. SEN CHAUDHARY: *Phys. Rev.*, **81**, 274 (1951).

<sup>(10)</sup> T. KAMEDA and I. MIURA: *Journ. Scien. Res. Inst. Tokio*, **45**, 65 (1951).

An interpretation for these observed anomalies, and for the relation mentioned above can be shown from the

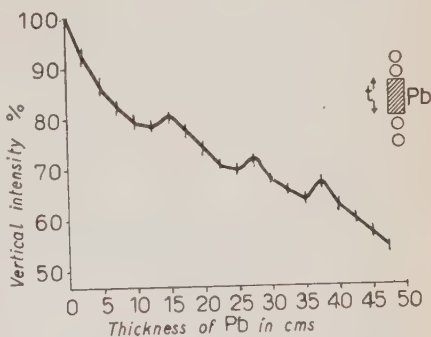


Fig. 1.

two following cases concerning showers created inside lead.

a) Shower created inside lead by a charged particle incident from a direction inclined at a small angle to the vertical. This shower has a component which can strike the 2 lower counters at the same time the incident particle strikes the 2 above counters.

b) Small angle shower created inside lead by an incident component of cosmic particles which passes only through the 2 above counters and is stopped inside lead. The secondary particles strike the 2 lower counters at the same time.

Thus this arrangement for measuring absorption behaves as a special case for the arrangement of Rossi for detecting transition showers.

I thank Prof. Dr. L. ALLEGRETTI for his useful suggestions, and also Prof. Dr. M. EL-SHERBINI the director of the department of physics.

## LIBRI RICEVUTI E RECENSIONI

---

C. MÖLLER - *The Theory of Relativity*.  
Oxford, At the Clarendon Press,  
1952, pp. xii+386.

Il presente volume, basato su un corso svolto ormai vent'anni fa, dall'Autore all'Università di Copenaghen, colma nel migliore dei modi una lacuna della letteratura fisica della prima metà del 900; è difficile infatti trovare un volume sulla teoria della relatività che contenga contemporaneamente la teoria speciale e generale e che accumuli il pregio di essere scritto con intento didattico con quello dell'estrema completezza.

Il primo capitolo del volume è dedicato all'esame delle difficoltà che si presentavano nella teoria dell'etere.

La risposta negativa alla domanda: «Permette una qualche esperienza di determinare il moto della terra rispetto all'etere?», conduce ad ammettere che il principio di relatività abbia validità generale; e se si ammette ancora la validità delle equazioni di Maxwell si è condotti al principio della costanza della velocità della luce e di qui (Cap. II) alla critica del concetto di simultaneità e alla deduzione delle trasformazioni di Lorentz.

Le utili formule della cinematica relativistica vengono poi stabilite, in particolare la formula di Thomas.

Nel cap. III sono trattate le equazioni del moto della dinamica relativistica e le formule di trasformazione per le grandezze dinamiche più importanti e

si accenna a quelle che sono le verifiche sperimentali delle formule stesse: l'angolo formato dalle direzioni del moto di due elettroni urtanti (CHAMPON), la deflessione degli elettroni in un tubo a raggi catodici, l'energia di legame dei nuclei.

Il cap. IV tratta la formulazione quadridimensionale della teoria della relatività; la covarianza delle leggi della natura rispetto alla trasformazione di Lorentz si esprime in effetti nel modo più semplice attraverso equazioni del tipo  $t_{iul} = 0$ , dove  $t_{iul}$  è un quadritensore. Come l'Autore avverte nella prefazione, nel presente volume il formalismo quadridimensionale è tuttavia usato meno di quanto si faccia di solito. Sebbene ovviamente tale formalismo sia lo strumento più indicato per trattare questioni di carattere generale, lo spazio ed il tempo, quali noi li concepiamo, sono enti fisicamente diversi e in una formulazione didattica della teoria è conveniente far risaltare questa differenza. Del resto, lo spazio che l'Autore dedica alla formulazione quadridimensionale della teoria è più che sufficiente a fare risaltare l'utilità del formalismo in questione.

In tutto il volume le due necessità, quella di separare nelle formule la parte spaziale e quella temporale e quella di far uso invece del formalismo a quattro dimensioni, si conciliano perfettamente.

L'invarianza della carica elettrica, conseguenza della validità in ogni sistema di riferimento dell'equazione di continuità, porta con sé che i potenziali sca-



lare e vettore costituiscono un quadrivettore ed apre la strada alla scrittura delle equazioni di Maxwell in forma covariante a vista.

Queste equazioni vengono trattate nel cap. V (Elettrodinamica del vuoto). Il formalismo quadrimensionale si rivela qui, come è noto, quasi indispensabile, permettendo una rapidissima deduzione dei potenziali di Lienard e Wiechert e di tutte le questioni connesse.

La trattazione dei sistemi chiusi, cioè di quei sistemi per i quali valgono i classici teoremi di conservazione, permette all'Autore di trattare la questione di definizione di baricentro di un sistema relativistico; come caso particolare di un sistema chiuso viene poi considerato un mezzo elastico e le equazioni del moto di tale mezzo sono stabilite.

Un esempio, infine, di sistema continuo relativistico è offerto da un qualsiasi campo quando la Lagrangiana ad esso associata è relativisticamente invariante. Questa questione è trattata nello stesso capitolo VI ed il tensore energia-impulso del campo viene costruito a partire dalla Lagrangiana. Segue poi nel capitolo seguente la trattazione di un insieme di questioni di solito poco discusse: l'elettrodinamica nei dielettrici e nei mezzi paramagnetici e la termodinamica relativistica; particolarmente interessante lo studio delle proprietà di trasformazione delle varie grandezze termodinamiche.

Col cap. VIII si apre la trattazione della teoria generale della relatività che occupa i successivi quattro capitoli. Nel capitolo in questione vengono, come è naturale, trattati i campi gravitazionali non permanenti, cioè quei campi che si presentano quando si è fuori dalla presenza immediata di masse gravitazionali. In tal caso, se ci si mette in un sistema inerziale, la geometria dello spazio-tempo è la geometria pseudo-euclidea, onde lo studio dei campi gravitazionali non permanenti non implica l'introduzione di una geometria di Riemann. Una tale

geometria è invece quella che si presenta quando si è in presenza di masse gravitazionali a distanza finita (campi gravitazionali permanenti). In tal caso non è più possibile introdurre un sistema di coordinate che renda le componenti del tensore  $g_{ik}$  indipendenti dal punto; ma è sempre possibile far sì che ciò sia vero in tutto un intorno di ciascun punto, cioè introdurre i sistemi locali di inerzia. Ciò rende possibile, ammesso il principio di equivalenza, ricavare anche in questo caso le leggi fisiche a partire da quelle note dalla teoria speciale, pur di sviluppare alquanto il calcolo tensoriale; è ciò che si fa nel cap. IX e i risultati ivi stabiliti servono (nel cap. X) per mostrare come, ammesso di conoscere la metrica, le equazioni fondamentali della meccanica e dell'elettromagnetismo possano essere immediatamente scritte. Resta il problema di determinare la metrica; questo viene trattato nel cap. XI seguente, nel quale si mostra come, supposto di conoscere il tensore energia-impulso del sistema, i  $g_{ik}$  siano determinati; essi (ossia il  $ds^2$ ) vengono poi determinati in vari casi interessanti ed in particolare, seguendo SCHWARZSCHILD, nel caso di una distribuzione di massa sferica. Quanto stabilito permette di calcolare lo spostamento del perielio di Mercurio che, assieme allo spostamento verso il rosso e alla deflessione gravitazionale della luce, costituiscono le tre esperienze di prova per la teoria generale della relatività; problemi che vengono discussi nell'ultimo capitolo. Il volume si chiude con una discussione sui modelli cosmologici.

La completezza dell'opera, che speriamo sia risultata evidente da quanto abbiamo qui scritto, rende augurabile che essa incontri la più larga diffusione; essa è veramente utile a chiunque si occupi di Fisica: sia egli ancora studente, o già dedito alla ricerca sperimentale, o teorico.

G. MORPURGO



H. S. W. MASSEY e E. H. S. BURHOP  
- *Electronic and Ionic Impact Phenomena*, pp. XVIII+669. At the Clarendon Press, Oxford, 1952.

Questo nuovo grosso volume di *The International Series of Monographs on Physics* sarà sicuramente accolto con grande interesse (stavamo per scrivere: con gioia) da tutti coloro che si trovano a dover combattere con le difficoltà e coi problemi di una tecnica in cui intervengano urti tra particelle di bassa energia: cioè dalla quasi totalità dei ricercatori. È infatti ben noto che i fenomeni d'urto di elettroni e di ioni tra loro, contro atomi e molecole neutre o contro superficie cristalline intervengono in modo diretto o indiretto e spesso in modo essenziale in quasi tutti i dispositivi oggi in uso per la rivelazione e lo studio dei fenomeni elementari, nonché in un numero sempre crescente di altri dispositivi, destinati a studi e ricerche di ogni genere. L'argomento trattato ha d'altra parte anche un notevolissimo interesse intrinseco, per le sue relazioni con la struttura dell'atomo e delle molecole e con le basi sperimentali della teoria dei quanti. Una limpida ed ordinata esposizione dello stato presente delle nostre conoscenze in materia, che presenti in un giusto equilibrio tutti i più importanti risultati sperimentali da un lato e d'altro lato (quando siano possibili) le impostazioni teoriche delle singole questioni e i relativi sviluppi, porterà quindi certamente un assai notevole contributo al progresso della ricerca e al chiarimento dei molti punti ancora oscuri od incerti.

Il volume di cui ci stiamo occupando risulta diviso in due parti, di ampiezza poco diversa, la prima delle quali comprende i primi sei capitoli (361 p.) e tratta per esteso i fenomeni d'urto in cui intervengono elettroni. Gli ultimi quattro capitoli, costituenti la seconda parte (285 p.), sono relativi ai fenomeni d'urto tra atomi ed ioni nei vari casi e

condizioni possibili e comprendono la trattazione dei fenomeni di ricombinazione.

La prima parte inizia con un capitolo relativo alla definizione e alla misura della sezione d'urto totale di elettroni contro atomi. Seguono due capitoli in cui l'urto di elettroni contro atomi viene diffusamente studiato, prima dal punto di vista sperimentale (II) e poi dal punto di vista teorico (III). Vengono descritti dapprima i metodi per la misura delle sezioni d'urto per ionizzazione e per eccitazione. Seguono lo studio della polarizzazione della radiazione emessa per urto elettronico e della distribuzione angolare degli elettroni diffusi, sia elasticamente sia anelasticamente. La parte teorica inizia con la trattazione quantistica della diffusione elastica, col calcolo della relativa sezione d'urto e della distribuzione angolare degli elettroni diffusi. Vengono quindi trattati nell'approssimazione di Born gli urti anelastici e si discute il confronto tra le sezioni d'urto calcolate e i dati sperimentali disponibili. Tra gli argomenti vari, trattati alla fine di questo capitolo, segnaliamo un paragrafo sul limite teorico di potere risolutivo per un microscopio elettronico.

Il capitolo IV riguarda l'urto di elettroni contro molecole. Viene trattata dapprima la diffrazione di elettroni, veloci e semiveloci, da parte di molecole e poi la diffusione di elettroni lenti. Tutto il resto del capitolo è dedicato alla eccitazione e dissociazione di molecole per urto elettronico: i dati disponibili relativi ai vari gas e vapori sono qui esposti e discussi diffusamente.

Il capitolo successivo (V) è dedicato all'emissione di elettroni secondari da parte di superficie sottoposte a bombardamento elettronico. Sono esposti i metodi di misura e le teorie dell'emissione secondaria e quindi discussi i dati sperimentali. Viene infine un capitolo (VI) dedicato agli urti elettronici con emissione di radiazione: si calcolano e discutono le sezioni d'urto e infine si tratta,

sia dal punto di vista teorico sia da quello sperimentale, la radiazione di frenamento.

Col capitolo VI ha inizio quella che abbiamo chiamato la seconda parte del volume. Esso tratta ampiamente gli urti tra atomi e molecole in condizione di disordine elementare. Le interazioni tra molecole sono studiate prima a partire dai dati macroscopici quali la viscosità e poi dalle misure dirette di sezioni d'urto totali. Segue un paragrafo sulla mobilità degli ioni positivi e quindi sono ampiamente trattate le collisioni anelastiche accompagnate da transizioni elettroniche o da variazioni dello stato di vibrazione e rotazione delle molecole.

I due capitoli successivi riguardano il passaggio di un fascetto omogeneo di raggi positivi o neutri attraverso gas (VIII) e l'urto di un tale fascetto contro una superficie (IX). Discussi i metodi per la produzione dei raggi in questione, si espongono i metodi sperimentali usati e i risultati ottenuti per la misura di sezioni d'urto elastiche e anelastiche. Si tratta quindi l'emissione di elettroni secondari per bombardamento ionico e i vari fenomeni di riflessione e variazione di carica di ioni nell'urto contro una superficie. Un paragrafo è dedicato alla interazione tra ioni positivi e superficie catodica nei contatori di Geiger. Viene infine trattata l'evaporazione catodica e l'urto di molecole gassose contro le pareti del recipiente.

L'ultimo capitolo (X) è, come già si è detto, dedicato ai fenomeni di ricombinazione tra ioni positivi e negativi e tra ioni positivi ed elettroni. Concludono il volume alcune appendici, di cui una relativa a risultati molto recenti, oltre ai soliti indici.

Come si vede, il materiale raccolto e ordinato in questo volume è imponente e ciò fa sì che esso risulti un manuale di consultazione e di orientamento sulle singole questioni veramente prezioso. La chiarezza dell'esposizione, la ricchezza di dati numerici selezionati, di grafici e

tabelle lo rende inoltre di uso facile e di piacevole lettura. Per ciò che riguarda la sostanza, il recensore ha invano cercato qualche svista da segnalare: se pur v'è, essa è al di là delle sue cognizioni e capacità critiche. Non resta quindi altro che lamentare l'esclusione da questo bellissimo volume di alcuni argomenti, tra i quali primo quello degli urti tra molecole nei liquidi, argomento che va attirando oggi sempre più l'attenzione dei ricercatori.

M. AGENO

A. MERCIER — *Leçons sur les principes de l'électrodynamique classique*. Pagg. 74. Édition du Griffon, Neuchâtel - Suisse 1952.

Il programma che si è proposto l'Autore nello scrivere questo libro è chiaramente delineato nella prefazione, dovuta a L. DE BROGLIE. In essa è detto che l'Autore ritrova e giustifica le formule e le equazioni fondamentali delle teorie di Maxwell e Lorentz partendo da ragionamenti molto generali e precisando la parte che, in buona logica, è necessario riservare alla costante dielettrica e alla permeabilità magnetica del vuoto. Un tale programma è svolto partendo dal convincimento che « una teoria ben fatta non deve prendere un fatto sperimentale per postulato: essa deve postulare proposizioni veramente prime, di per se stesse non dimostrabili e direttamente non verificabili dall'esperienza; quindi dedurre relazioni tra grandezze misurabili, relazioni queste direttamente verificabili dall'esperienza ».

Questa strana idea, dedotta forse da una vecchia classificazione delle teorie indescriptive ed esplicative, insostenibile, perchè i « fatti » verificati o supposti, che stanno a base della teoria sono in realtà sempre ipotesi, almeno di generalizzazione, svela la posizione mentale del-

l'Autore che coi termini del problema degli Universali si chiamerebbe «realismo».

Ciò si conferma dovunque l'Autore parla di dimensioni delle grandezze fisiche e di costanti d'interazione. Qui egli prende continuamente per necessità logica fatti di pura convenienza. Egli non dice per es. che una «costante d'interazione» c'è anche nella legge della dinamica:  $F = k d(mv)/dt$ , e che per pura convenienza noi la poniamo uguale ad uno, cosa che per es. non facciamo nella legge di gravitazione universale:  $F = G m_1 m_2 / r^2$ , rinunciando per comodità a ridurre a due sole le grandezze indipendenti del nostro sistema di unità e sostituendo a un campione di massa difficilmente riproducibile un campione completamente arbitrario.

Anche là dove l'Autore, per dimostrare l'assurdità logica dei due sistemi elettrostatico ed elettromagnetico, afferma che «una carica non può essere uguale al prodotto di una carica per una velocità», c'è evidentemente la stessa grossolana confusione d'idee. Si dimentica ancora una volta che le grandezze fisiche sono formazioni concettuali che derivano da un gruppo di operazioni effettivamente eseguibili e che cambiando il gruppo di operazioni, cambia il concetto corrispondente, anche se per avventura non se ne cambia il simbolo. Consigliamo all'Autore di leggere almeno «La logica della fisica moderna» di BRIDGMANN.

Con questo bagaglio d'idee, l'Autore va alla ricerca delle proposizioni «veramente prime», «indimostrabili», necessarie per rendere l'elettromagnetismo una «teoria ben fatta». Tali proposizioni sarebbero di due categorie. Una prima categoria comprende alcune «condizioni» generali ricavate in parte dalla necessità di introdurre per ogni nuova branca della fisica, almeno due (?) grandezze; ed in parte da considerazioni dimensionali. Una seconda categoria è data dalle condizioni particolari dell'elettricità che sono: la specificazione delle grandezze fisiche nuove proprie dell'elettromagnetismo e la constatazione della conservazione della carica e della propagazione dei campi con velocità finita.

La costruzione, a partire dalle proposizioni prime, delle equazioni di Maxwell e Lorentz procede dalle equazioni di Coulomb-Gauss, ricavate facendo uso di condizioni di invarianza, che si suppongono necessariamente verificate dalle leggi della fisica.

Una volta giunti, con la trattazione contenuta nei primi capitoli, alle equazioni che legano i campi nel vuoto, l'estensione al caso della materia è fatto seguendo le linee classiche.

Nettamente distaccato dal resto del libro è l'ultimo capitolo, che contiene un tentativo di assiomatica condotto facendo uso dei numeri di Clifford.

G. CORTELESSA

IL NUOVO CIMENTO

INDICI

DEL VOLUME IX - SERIE IX

1952

PRINTED IN ITALY



# INDICE SISTEMATICO PER NUMERI SUCCESSIVI DEL PERIODICO

## N. 1, 1 GENNAIO 1952

A. CARRELLI and L. RESCIGNO - Misure della costante dielettrica di soluzioni saline acquose in alta frequenza . . . . .	pag. 1
P. CALDIROLA, R. FIESCHI and P. GULMANELLI - A Phenomenological Theory of Cosmic Radiation in the Atmosphere . . . . .	» 5
A. CICCONE - Luminescenza di soluzioni per effetto di raggi $\gamma$ rivelata mediante un fotomoltiplicatore 931 A . . . . .	» 36
G. BOATO, G. CARERI and M. SANTANGELO - Argon Isotopes in Natural Gases . . . . .	» 44
A. J. C. WILSON - Theory and Use of Statistical Methods in the Determination of Symmetry and Structure of Crystals . . . . .	» 50
D. C. PEASLEE - Cosmic Ray Evidence on the $\mu$ -meson Magnetic Moment . . . . .	» 56
D. C. PEASLEE - Cosmic Rays Underground . . . . .	» 61

### *Note Tecniche:*

E. PERSICO - A New Resistor Network for the Integration of Laplace's Equation . . . . .	» 74
---	------

### *Lettere alla Redazione:*

A. CARRELLI and F. PORRECA - Ultrasonic Grating remaining after stopping the Supersonic Waves . . . . .	» 90
M. DEMEUR, C. DILWORTH and M. SCHÖNBERG - A Probable Example of multiple Production of Mesons . . . . .	» 92

<i>Libri ricevuti e Recensioni</i> . . . . .	» 95
--	------

## N. 2, 1 FEBBRAIO 1952

C. MARCHETTI e M. SILVESTRI - L'impianto ideale per la separazione degli isotopi . . . . .	pag. 97
M. MANDÒ e L. RONCHI jr. - Sulla perdita di energia di mesoni veloci per creazione di coppie . . . . .	» 105
G. SEGRÈ - Sulle particelle $\alpha$ nella radiazione cosmica primaria . . . . .	» 116



G. CARERI - Note on the Superposition Method in Mass Spectrometry . .	pag. 128
G. LOVERA - Questioni statistiche sulla distribuzione angolare dei rami nelle stelle prodotte dalla radiazione cosmica . . . . .	» 134
I. H. FORD et E. E. PICCIOTTO - Étude des minéraux de terres rares par absorption neutronique . . . . .	» 141
G. VALLE - Teoria della tensione di scarica fra elettrodi cilindrici coassiali in campo magnetico trasversale . . . . .	» 145

*Note Tecniche:*

C. GIMENEZ et J. LABEYRIE - Fabrication et propriétés des compteurs de Geiger remplis à la vapeur de brome et destinés à la prospection $\beta$ et $\gamma$ . .	» 169
--	-------

*Lettere alla Redazione:*

F. G. FUMI - Photoelasticity in Crystals . . . . .	» 184
F. J. WIŚNIEWSKI - Une déduction non ondulatoire des formules de la dif- fraction des particules sur un cristal . . . . .	» 186
E. GATTI e G. GERMAGNOLI - Un nuovo metodo di coincidenza . . . . .	» 189
G. CORTINI, A. MANFREDINI e G. SEGRÈ - Sullo spettro di energia della componente nucleonica a varie quote . . . . .	» 191
F. CORINALDESI - Current Fluctuations in Quantum Electrodynamics . .	» 194
M. AGENO e G. CORTELESSA - Sulla fluorescenza destata da particelle alfa nello stilbene . . . . .	» 196
P. BUDINI e G. POJANI - Sull'aumento della ionizzazione specifica primaria alle alte energie . . . . .	» 199
N. DALLAPORTA, M. MERLIN, O. PIERUCCI e A. ROSTAGNI - Generazione di mesoni $\pi$ in Piombo ed Alluminio esposti ai raggi cosmici . . . . .	» 202
A. LOVATI, A. MURA and G. TAGLIAFERRI - Neutral Meson Production in Energetic Nuclear Encounters . . . . .	» 205
G. WATAGHIN - On the Quantum Theory of Fields (II) . . . . .	» 208
M. SCHÖNBERG - The theory of ionization and the emission of Cerenkov radiation . . . . .	» 210
<i>Libri ricevuti e Recensioni</i> . . . . .	» 212

N. 3, 1 MARZO 1952

M. MOTZO - Curve teoriche di risonanza nell'interazione tra onde elettro- magnetiche per incidenza verticale nella ionosfera . . . . .	pag. 213
C. C. GROSJEAN - Note on the Diffraction of Light by a Finite Number of Centres Distributed at Random . . . . .	» 220
H. C. CORBEN - A unified field theory with varying charge and rest-mass . .	» 235
S. MILONE TAMBURINO e A. STELLA - Determinazione della radioattività di una pegmatite di Delianova mediante emulsioni nucleari esposte a strati di roccia polverizzata e compressa ed a sezioni sottili . . . . .	» 253

S. GALLONE e L. ORSONI - Sul regime transitorio dei reattori nucleari con diffusore . . . . .	pag. 269
F. PORRECA - Sulla propagazione di sottili fasci luminosi in liquidi attraversati da ultrasuoni . . . . .	» 274
M. AGENO e R. QUERZOLI - Sul meccanismo delle scintillazioni nelle soluzioni . . . . .	» 282
M. R. SCHAFROTH - Coulomb Interaction and the Meissner-Ochsenfeld effect . . . . .	» 291

*Note Tecniche:*

L. BERTI - Elementi per il calcolo di un filtro birfrangente . . . . .	» 304
--	-------

*Lettere alla Redazione:*

B. FERRETTI - Sugli stati isobarici dei nucleoni e la diffusione dei mesoni $\pi$ contro i protoni . . . . .	» 312
--	-------

<i>Libri ricevuti e Recensioni</i> . . . . .	» 314
--	-------

<i>Addendum</i> . . . . .	» 163
---------------------------	-------

N. 4, 1 APRILE 1952

E. BERETTA, I. FILOSOFO e B. SOMMACAL - Sull'eccesso positivo verticale ed inclinato dei mesoni $\mu$ . . . . .	pag. 317
M. PAGANELLI e G. QUARENI - Sullo schema di disintegrazione del $K^0$ . . . . .	» 324
E. R. CAIANIELLO - Fermion Types and ensuing Selection Rules . . . . .	» 336
S. PETRALIA - Interferometria ultrasonora nei gas - (II): Dispersione ultrasonora nel cloruro di metile . . . . .	» 351
P. BASSI, A. M. BIANCHI e C. MANDUCHI - Sulla componente fotonica degli sciami estesi dell'aria . . . . .	» 358

*Note Tecniche:*

A. ALBERIGI, F. LEPRI e G. STOPPINI - Uno speciale selettore temporale di impulsi elettronico . . . . .	» 365
---	-------

*Lettere alla Redazione:*

E. CLEMENTEL - Interazione di mesoni $\pi$ con la materia nucleare . . . . .	» 369
M. SCHÖNBERG - Ionization Loss at Relativistic Energies and Polarization Effects . . . . .	» 372
M. VERDE - Accoppiamento spin-orbita e polarizzazione di neutroni . . . . .	» 376

<i>Libri ricevuti e Recensioni</i> . . . . .	» 380
--	-------

## N. 5, 1 MAGGIO 1952

P. BUDINI e G. LANZA - Sulla componente « N » dei raggi cosmici alle alte energie . . . . .	pag. 381
M. CUTOLO - Determinazione sperimentale delle curve di risonanza nel moto degli elettroni lenti dell'alta atmosfera . . . . .	» 391
G. BERTOLINO, M. CINI, P. COLOMBINO e G. WATAGHIN - Produzione multipla di mesoni negli sciami penetranti . . . . .	» 407
S. K. MUKERJI and BANARSI LAL - On The Raman Spectra of p-diphenylbenzene in various solutions . . . . .	» 413
M. MERLIN, B. VITALE e Y. GOLDSCHMIDT-CLERMONT - Misura dell'eccesso positivo a bassa energia mediante sandwich di lastre nucleari in campo magnetico . . . . .	» 421

*Note Tecniche:*

L. MUSUMECI - Sull'aberrazione degli spettrometri di massa a settore magnetico . . . . .	» 429
--	-------

*Lettere alla Redazione:*

E. CORINALDESI, L. TRAINOR and TA-YOU-WU - The Oppenheimer Approximation for the Scattering of Electrons . . . . .	» 436
A. CARRELLI e E. TARTAGLIONE - Diffrazione di raggi X da parte di soluzioni acquose di zucchero caramellato . . . . .	» 440
G. LOVERA - Formula per le frequenze di vibrazione delle molecole biatomiche dei metalli alcalini . . . . .	» 442
P. BUDINI - Cattura nucleare del mesone $\mu$ . . . . .	» 445
N. DALLAPORTA - Sulle vite medie dei mesoni $\mu^+$ e $\mu^-$ . . . . .	» 449
E. AMALDI, C. CASTAGNOLI, A. GIGLI and S. SCIUTI - On the Interaction of Cosmic Rays with Matter under 50 meters Water Equivalent . . . . .	» 453

<i>Libri ricevuti e Recensioni</i> . . . . .	» 456
--	-------

## N. 6, 1 GIUGNO 1952

G. MORPURGO - Sull'energia di legame dell' $H^3$ e dell' $He^4$ . . . . .	pag. 461
F. MONTICELLI - Sui metodi di soluzione delle equazioni della cascata elettrofotonica . . . . .	» 477
F. FERRARI e C. VILLI - Sulla teoria evaporativa delle disintegrazioni nucleari . . . . .	» 487
D. BRINI, O. RIMONDI e I. FILOSOFO - Spettro dei mesoni $\mu$ al livello del mare . . . . .	» 505
E. CERRAI, C. MARCHETTI e M. SILVESTRI - Misura della concentrazione in deuterio dell'acqua di condensa di un soffione boracifero di Larderello . . . . .	» 511
M. MANDÒ e L. RONCHI jr. - On the Energy Range Relation for fast Muons in Rock . . . . .	» 517

*Note Tecniche:*

- E. CERRAI, C. MARCHETTI e M. SILVESTRI - Applicazione del metodo del galleggianti alla misura rapida della concentrazione in  $D_2O$  di soluzioni acquose di acqua pesante . . . . . pag. 530
- A. MALVICINI - Rivelatore a scintillazione per particelle  $\alpha$  . . . . . » 535

*Lettere alla Redazione:*

- G. BOATO, G. CARERI and G. G. VOLPI - Hydrogen Isotopes in Steam Wells » 539
- G. LOVERA - Sulle frequenze di vibrazione delle molecole biatomiche formate con atomi del 4°, 5°, 6°, 7° gruppo . . . . . » 541
- A. GAMBA and M. VERDE - On a question of nuclear spectroscopy . . . . » 544

- Libri ricevuti e Recensioni* . . . . . » 547

## N. 7, 1 LUGLIO 1952

- C. MILONE - Sullo spettro di energia degli elettroni negli sciami estesi di raggi cosmici . . . . . pag. 549
- E. CLEMENTEL e F. FERRARI - Sulla componente nucleonica nell'atmosfera (II) » 572
- H. C. CORBEN - A Reformulation of Field Theory . . . . . » 580
- B. HOLMBERG - A remark on the uniqueness of the potential determined from the asymptotic phase . . . . . » 597

*Note Tecniche:*

- M. DELLA CORTE and M. RAMAT - Photometric Measurements on Tracks in Nuclear Emulsions . . . . . » 605
- R. ASCOLI - Sulla rivelazione di sciami di particelle mediante contatori a scintillazione . . . . . » 610
- R. ASCOLI - Su un dispositivo per la stabilizzazione dei fotomoltiplicatori » 615
- A. CARRELLI e L. RESCIGNO - Misure di conducibilità in alta frequenza con soluzioni viscosi . . . . . » 618

*Lettere alla Redazione:*

- P. J. WIŚNIEWSKI - Théorie mécanique de la diffusion des particules par des réseaux . . . . . » 620
- M. ANNIS, H. BRIDGE, H. COURANT, S. OLBERT and B. ROSSI - S-Particles » 624
- P. BROVETTO e S. FERRONI - Transizioni proibite negli spettri di risonanza paramagnetica degli allumi di cromo . . . . . » 628
- L. BARBANTI SILVA, C. BONACINI, C. DEPIETRI, G. LOVERA e R. PERILLI FEDELI - Sulla distribuzione anomala delle stelle di disintegrazione prodotte dalla radiazione cosmica nelle emulsioni fotografiche . . . . . » 630

- Libri ricevuti e Recensioni* . . . . . » 633

## N. 8, 1 AGOSTO 1952

C. MILONE - Sulle particelle penetranti negli sciami estesi dei raggi cosmici e la fase di sviluppo degli sciami . . . . .	pag. 637
D. BARONCINI - The Non-Adiabatic Method with a Neutral Pseudo-Scalar Meson Field . . . . .	" 642
G. CORTINI, A. MANFREDINI and G. SEGRÈ - On nuclear explosions produced by primary protons in emulsions exposed in the high atmosphere . . .	" 659
M. CUTOLO - Su di un nuovo fenomeno di interazione fra onde ed elettroni liberi sottoposti al campo magnetico terrestre . . . . .	" 687
S. K. MUKERJI and BANARSI LAL - On the Raman Spectra of Thianthrene in Various Solutions . . . . .	" 699
E. INÖNÜ and E. P. WIGNER - Representations of the Galilei Group . . .	" 705
A. CARRELLI e L. RESCIGNO - Misure di conducibilità di elettroliti forti e deboli in alta frequenza . . . . .	" 719
P. BASSI, C. MANDUCHI e P. VERONESI - Sulla distribuzione zenitale della componente nucleonica di media energia . . . . .	" 722
G. PUPPI, V. DE SABBATA e E. MANARESI - Eccitazione dei nuclei per assorbimento dei mesoni $\pi^-$ - I: Considerazioni generali . . . . .	" 726

*Lettere alla Redazione:*

M. ABD EL-WAHAB, L. ALLEGRETTI, M. G. EL-FANDI e M. EL-SHERBINI: Aumento dell'intensità dei raggi cosmici al livello del mare durante tempeste di sabbia . . . . .	" 734
--	-------

<i>Libri ricevuti e Recensioni</i> . . . . .	" 736
--	-------

## N. 9, 1 SETTEMBRE 1952

F. G. FUMI - Matter tensors in Symmetrical Systems . . . . .	pag. 739
R. ASCOLI - Interazioni non localizzabili. Esempio dell'effetto Compton .	" 757
M. HUYBRECHTS and M. SCHÖNBERG - Ionization at relativistic energies and polarization effects . . . . .	" 764
G. MORPURGO - Sulla corrispondenza tra elettrodinamica classica e quantistica . . . . .	" 808
S. PETRALIA - Interferometria ultrasonora nei gas (III). Velocità e assorbimento di ultrasuoni nell'amidride solforosa . . . . .	" 818
G. POIANI e C. VILLI - Sulla probabilità di localizzazione degli elettroni negli sciami estesi . . . . .	" 825
P. CALDIROLA e P. GULMANELI - Su una nuova equazione ondulatoria per una particella a spin $1/2$ . . . . .	" 834
S. FUBINI - Sull'operatore $U(t)$ di Dyson-Feynman . . . . .	" 846

*Lettere alla Redazione:*

F. BERTOLINI - Sulla capacità di un condensatore sferico . . . . .	" 852
--	-------

A. LOINGER - Sulle soluzioni dell'equazione di Dirac-Corben . . . . .	pag. 855
G. LOVERA - Sull'anomalia nella distribuzione angolare intrinseca dei rami nelle stelle prodotte dalla radiazione cosmica . . . . .	» 857
P. BASSI, A. M. BIANCHI and C. MANDUCHI - Intensity measurement of Ce- renkov light . . . . .	» 861
A. A. K. IBRAHIM and A. M. KABIEL - On the Oscillating Cylinder Viscosimeter . . . . .	» 864

## N. 10, 1 OTTOBRE 1952

G. BARONI, G. CORTINI, A. MILONE, L. SCARSI e G. VANDERHAEGE - Étude de la composante molle du rayonnement cosmique au Pic du Midi . . . . .	pag. 867
L. INGRAHAM - Conformal relativity . . . . .	» 886
F. FERRARI e C. VILLI - Sui livelli energetici dei nuclei pesanti . . . . .	» 927
E. CORINALDESI and L. TRAINOR - Evaluation of Integrals in the Theory of Atomic Scattering of Electrons . . . . .	» 940
A. LOVATI, A. MURA, G. TAGLIAFERRI and S. TERRANI - A Cloud Chamber Analysis of Cosmic Rays at 3500 Metres. - Part A: The Electronic Com- ponent from Nuclear Disintegrations in Lead . . . . .	» 946
A. ALBERIGI QUARANTA and E. PANCINI - The disintegration of $\mu$ -mesons in carbon . . . . .	» 959
A. AMALDI, G. CASTAGNOLI, A. GIGLI and S. SCRUTI - On the interaction of cosmic rays with matter under 50 metres water equivalent . . . . .	» 969
G. BERTOLINI, M. BETTONI e A. BISI - Ionizzazione totale delle particelle $\alpha$ del polonio in argon e azoto . . . . .	» 1004
E. SEGRÈ - The problem of the stability of technetium. . . . .	» 1008

*Note Tecniche:*

E. GATTI, E. GERMAGNOLI, A. PERSANO and E. ZIMMER - Boron Layer Scintil- tillation Neutron Detectors . . . . .	» 1012
G. BERTOLINI e A. BISI - Una camera di ionizzazione a bassa capacità . . . . .	» 1022

*Lettere alla Redazione:*

M. CINI - The commutation laws in the theory of quantized fields . . . . .	» 1025
CH. THERRAUX - Meson Production with Latitude Cut-Off . . . . .	» 1029
A. GAMBA - Pion production and charge independence . . . . .	» 1032

<i>Libri ricevuti e Recensioni</i> . . . . .	» 1035
--	--------

*Addendum:*

M. MANDÒ and L. RONCHI jr. - On the energy range relation for fast Muons in Rock . . . . .	» 1036
---	--------

## N. 11, 1 NOVEMBRE 1952

P. BASSI, A. M. BIANCHI, D. CADORIN e C. MANDUCHI - Sulla distribuzione zenitale delle particelle degli sciami estesi . . . . .	pag. 1037
S. MILONE TAMBURINO e A. STELLA - Sulla radioattività delle lave etnee . . . . .	» 1044
J. W. BROXON - New Barometric and Temperature Coefficients for the Frequency of Small Cosmic-Ray Bursts . . . . .	» 1054
H. C. CORBEN - The current density in quantum electrodynamics . . . . .	» 1071
A. LOINGER - Un semplice modello di due campi interagenti . . . . .	» 1080

*Note Tecniche:*

P. BASSI e A. M. BIANCHI - Questioni tecniche sui contatori a radiazione di Cerenkov (I) . . . . .	» 1087
C. SUCCI and G. TAGLIAFERRI - On the Operation of the Diffusion Cloud Chamber . . . . .	» 1092

*Lettere alla Redazione:*

S. FERRONI - Relation between Even and Odd Couplings in Beta-Decay Theory . . . . .	» 1103
F. DEMICHELIS and R. MALVANO - Coincidence Investigation of the spectrum from $^{214}_{83}\text{Bi}$ (RaC) . . . . .	» 1106

## N. 12, 1 DICEMBRE 1952

G. POIANI e C. VILLI - Sullo sparpagliamento laterale degli sciami alle basse energie . . . . .	pag. 1109
W. O. SCHUMANN - Über die Ausbreitung sehr langer elektrischer Wellen um die Erde und die Signale des Blitzes . . . . .	» 1116
M. SCHÖNBERG - Application of second quantization methods to the classical statistical mechanics (I) . . . . .	» 1139
L. COLLI e U. FACCHINI - Il meccanismo della scarica nei contatori ad argon . . . . .	» 1183
E. R. CAIANIELLO and S. FUBINI - On the Algorithm of Dirac Spurs . . . . .	» 1218

*Note Tecniche:*

F. DEMICHELIS e R. MALVANO - Sul funzionamento di un particolare circuito a coincidenze . . . . .	» 1227
---	--------

*Lettere alla Redazione:*

R. MÜLLER und P. STOLL - Kernphotospaltung am $\text{B}^{10}$ und $\text{B}^{11}$ durch $\gamma$ -Strahlen bis 31 MeV . . . . .	» 1232
A. BRACCI, U. FACCHINI e A. MALVICINI - Spettro della radiazione $\gamma$ emessa nella reazione $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}^*$ , $^7\text{Li}^* \rightarrow ^7\text{Li} + \gamma$ . . . . .	» 1237



E. BELLOMO e A. LOINGER - Equivalenza fisica dell'equazione di Dirac-Corben con l'equazione di Dirac . . . . .	pag. 1240
M. AGENO, G. CORTELLESSA e R. QUERZOLI - Un caso d'invecchiamento di scintillatori liquidi . . . . .	» 1242
R. LEVI SETTI and G. TOMASINI - Slow Heavy Mesons from Cosmic Ray Stars . . . . .	» 1244
M. ABD EL-WAHAB-KHALIL - Anomalies of the absorption curve of cosmic radiation in lead . . . . .	» 1248
<i>Libri ricevuti e Recensioni</i> . . . . .	» 1250

## INDICE PER AUTORI

Le sigle L., N.T., I., N.d.L., P. D., si riferiscono rispettivamente alle *Lettere alla Redazione*, alle *Note Tecniche*, alle *Informazioni*, alle *Note di Laboratorio*, alle *Proposte e Discussioni*.

ABD EL WAHAB KHALIL M. - Anomalies of the absorption curve of cosmic radiation in lead (L.) . . . . .	pag. 1248
ABD EL-WAHAB M., L. ALLEGRETTI, M. G. EL FANDI e M. EL-SHERBINI - Aumento dell'intensità dei raggi cosmici al livello del mare durante tempeste di sabbia (L.) . . . . .	» 734
AGENO M. e G. CORTELLESSA - Sulla fluorescenza destata da particelle alfa nello stilbene (L.) . . . . .	» 196
AGENO M. e R. QUERZOLI - Sul meccanismo delle scintillazioni nelle soluzioni . . . . .	» 282
AGENO M., G. CORTELLESSA e R. QUERZOLI - Un caso d'invecchiamento di scintillatori liquidi (L.) . . . . .	» 1242
ALBERIGI A., F. LEPRI e G. STOPPINI - Uno speciale selettore temporale di impulsi elettronico (N.T.) . . . . .	» 365
ALBERIGI QUARANTA A. and E. PANCINI - The disintegration of mesons in carbon . . . . .	» 959
ALLEGRETTI L. (vedi ABD EL-WAHAB M.) . . . . .	» 734
AMALDI E., C. CASTAGNOLI, A. GIGLI and S. SCIUTI - On the Interaction of Cosmic Rays with Matter under 50 metres Water Equivalent (L.) . . . . .	» 453
AMALDI E., C. CASTAGNOLI, A. GIGLI and S. SCIUTI - On the Interaction of Cosmic Rays with matter under 50 metres Water Equivalent . . . . .	» 969
ANNIS M., H. BRIDGE, M. COURANT, S. OLBERT and B. ROSSI - S-Particles (L.) . . . . .	» 624
ASCOLI R. - Interazioni non localizzabili. Esempio dell'effetto Compton . . . . .	» 757
ASCOLI R. - Sulla rivelazione di sciami di particelle mediante contatori a scintillazione (N.T.) . . . . .	» 610
ASCOLI R. - Su un dispositivo per la stabilizzazione dei fotomoltiplicatori (N.T.) . . . . .	» 615
BANARSI LAL (vedi MUKERJI S. K.) . . . . .	» 413
BANARSI LAL (vedi MUKERJI S. K.) . . . . .	» 699

BARBANTI SILVA L., C. BONACINI, C. DE PIETRI, G. LOVERA e R. PERILLI FEDELI - Sulla distribuzione anomala delle stelle di disintegrazione prodotte dalla radiazione cosmica nelle emulsioni fotografiche . . . . .	pag. 630
BARONCINI D. - The Non-Adiabatic Method with a Neutral Pseudo-Scalar Meson Field . . . . .	" 642
BARONI G., G. CORTINI, A. MILONE, L. SCARSI e G. VANDERHAEGHE - Étude de la composante molle du rayonnement cosmique au Pic du Midi . . . . .	" 867
BASSI P. e A. M. BIANCHI - Questioni tecniche sui contatori a radiazione di Cerenkov (I) (N. T.) . . . . .	" 1087
BASSI P., A. M. BIANCHI, D. CADORIN e C. MANDUCHI - Sulla distribu- zione zenitale delle particelle degli sciami estesi . . . . .	" 1037
BASSI P., A. M. BIANCHI e C. MANDUCHI - Sulla componente fotonica degli sciami estesi dell'aria . . . . .	" 358
BASSI P., A. M. BIANCHI and C. MANDUCHI - Intensity Measurement of Cerenkov light (L.) . . . . .	" 861
BASSI P., C. MANDUCHI e P. VERONESI - Sulla distribuzione zenitale della componente nucleonica di media energia . . . . .	" 722
BELLOMO E. e A. LOINGER - Equivalenza fisica dell'equazione di Dirac- Corben con l'equazione di Dirac (L.) . . . . .	" 1240
BERETTA E., I. FILOSOFO e B. SOMMACAL - Sull'eccesso positivo verticale ed inclinato dei mesoni $\mu$ . . . . .	" 317
BERTI L. - Elementi per il calcolo di un filtro birifrangente (N. T.) . .	" 304
BERTOLINI F. - Sulla capacità di un condensatore sferico (L.) . . . . .	" 852
BERTOLINI G. e A. BISI - Una camera di ionizzazione a bassa capacità (N. T.) . . . . .	" 1022
BERTOLINI G., M. BETTONI e A. BISI - Ionizzazione totale delle particelle del polonio in argon e azoto . . . . .	" 1004
BERTOLINO G., M. CINI, P. COLOMBINO e G. WATAGHIN - Produzione mul- tipla di mesoni negli sciami penetranti . . . . .	" 407
BETTONI M. (vedi BERTOLINI G.) . . . . .	" 1004
BIANCHI A. M. (vedi BASSI P.) . . . . .	" 358
BIANCHI A. M. (vedi BASSI P.) . . . . .	" 861
BIANCHI A. M. (vedi BASSI P.) . . . . .	" 1037
BIANCHI A. M. (vedi BASSI P.) . . . . .	" 1087
BISI A. (vedi BERTOLINI G.) . . . . .	" 1004
BISI A. (vedi BERTOLINI G.) . . . . .	" 1022
BOATO G., G. CARERI and G. VOLPI - Hydrogen Isotopes in Steam Wells (L.) . . . . .	" 539
BOATO G., G. CARERI and M. SANTANGELO - Argon Isotopes in Natural Gases BONACINI C. (vedi BARBANTI SILVA L.) . . . . .	" 44 " 630
BRACCI A., U. FACCHINI e A. MALVICINI - Spettro della radiazione $\gamma$ emessa nella reazione $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}^*$ , $^7\text{Li}^* \rightarrow ^7\text{Li} + \gamma$ (L.) . . . . .	" 1237
BRIDGE H. (vedi ANNIS M.) . . . . .	" 624
BRINI D., O. RIMONDI e I. FILOSOFO - Spettro dei mesoni al livello del mare BROVETTO P. e S. FERRONI - Transizioni proibite negli spettri di risonanza paramagnetica degli allumi di Cromo (L.) . . . . .	" 505 " 628
BRONXON J. W. - New Barometric and Temperature Coefficients for the Frequency of Small Cosmic-Ray Bursts . . . . .	" 1054
BUDINI P. - Cattura nucleare del mesone $\mu$ (L.) . . . . .	" 445

BUDINI P. e G. LANZA — Sulla componente « $N$ » dei raggi cosmici alle alte energie . . . . .	pag. 381
BUDINI P. e G. POIANI — Sull'aumento della ionizzazione specifica primaria alle alte energie (L.) . . . . .	199
CADORIN D. (vedi BASSI P.) . . . . .	1037
CAIANIELLO E. R. — Fermion types and ensuing Selection Rules . . . . .	336
CAIANIELLO E. R. and S. FUBINI — On the Algorithm of Dirac Spurs . . . . .	1218
C'ALDIROLA P., R. FIESCHI and P. GULMANELLI — A Phenomenological Theory of Cosmic Radiation in the Atmosphere . . . . .	5
C'ALDIROLA P. e P. GULMANELLI — Su una nuova equazione ondulatoria per una particella a spin $1/2$ . . . . .	834
CARERI G. — Note on the Superposition Method in Mass Spectrometry . . . . .	128
CARERI G. (vedi BOATO G.) . . . . .	44
CARERI G. (vedi BOATO G.) . . . . .	539
CARRELLI A. and F. PORRECA — Ultrasonic Grating remaining after stopping the Supersonic Waves (L.) . . . . .	90
CARRELLI A. e L. RESCIGNO — Misure della costante dielettrica di soluzioni saline acquose in alta frequenza . . . . .	1
CARRELLI A. e L. RESCIGNO — Misure di conducibilità in alta frequenza con soluzioni viscosse (N. T.) . . . . .	618
CARRELLI A. e L. RESCIGNO — Misure di conducibilità di elettroliti forti e deboli in alta frequenza . . . . .	719
CARRELLI A. e E. TARTAGLIONE — Diffrazione di raggi X da parte di soluzioni acquose di zucchero caramellato (L.) . . . . .	440
CASTAGNOLI C. (vedi AMALDI E.) . . . . .	453
CASTAGNOLI C. (vedi AMALDI E.) . . . . .	969
CERRAI E., C. MARCHETTI e M. SILVESTRI — Misura della concentrazione in deuterio dell'acqua di condensa di un soffione boracifero di Larderello	511
CERRAI E., C. MARCHETTI e M. SILVESTRI — Applicazione del metodo del galleggiante alla misura rapida della concentrazione in $D_2O$ di soluzioni acquose di acqua pesante (N. T.) . . . . .	530
CICCONI A. — Luminescenza di soluzioni per effetto di raggi $\gamma$ rivelata mediante un fotomoltiplicatore 931A . . . . .	36, 316
CINI M. — The commutation laws in the theory of quantized fields (L.) . . . . .	1025
CINI M. (vedi BERTOLINO G.) . . . . .	407
CLEMENTEL E. — Interazione di mesoni $\pi$ con la materia nucleare (L.) . . . . .	369
CLEMENTEL E. e F. FERRARI — Sulla componente nucleonica dell'atmosfera (II)	572
COLLI L. e U. FACCHINI — Il meccanismo della scarica nei contatori ad argon	1183
COLOMBINO P. (vedi BERTOLINO G.) . . . . .	407
CORBEN H. C. — A unified field theory with varying charge and rest-mass	235
CORBEN H. C. — A Reformulation of Field Theory . . . . .	580
CORBEN H. C. — The current density in quantum electrodynamics . . . . .	1071
CORINALDESI E. — Current Fluctuations in Quantum Electrodynamics (L.)	194
CORINALDESI E. and L. TRAINOR — Evaluation of Integrals in the Theory of Atomic Scattering of Electrons . . . . .	940
CORINALDESI E., L. TRAINOR and TA-YOU-WU — The Oppenheimer approximation for the scattering of electrons (L.) . . . . .	436
CORTELLESA G. (vedi AGENO M.) . . . . .	196
CORTELLESA G. (vedi AGENO M.) . . . . .	1242
CORTINI G. (vedi BARONI G.) . . . . .	867

CORTINI G., A. MANFREDINI e G. SEGRÈ - Sullo spettro di energia della componente nucleonica a varie quote (L.) . . . . .	pag. 191
CORTINI G., A. MANFREDINI and G. SEGRÈ - On nuclear explosions produced by primary protons in emulsions exposed in the high atmosphere . . . . .	" 659
COURANT H. (vedi ANNIS M.) . . . . .	" 624
CUTOLO M. - Determinazione sperimentale delle curve di risonanza nel moto degli elettroni lenti dell'alta atmosfera . . . . .	" 391
CUTOLO M. - Su di un nuovo fenomeno di interazione fra onde ed elettroni liberi sottoposti al campo magnetico terrestre . . . . .	" 687
DALLAPORTA N. - Sulle vite medie dei mesoni $\mu^+$ e $\mu^-$ (L.) . . . . .	" 449
DALLAPORTA N., M. MERLIN, O. PIERUCCI e A. ROSTAGNI - Generazione di Mesoni in Piombo ed Alluminio esposti ai raggi cosmici (L.) . . . . .	" 202
DELLA CORTE M. and M. RAMAT - Photometric Measurements on Tracks in Nuclear Emulsions (N. T.) . . . . .	" 605
DEMEUR M., C. DILWORTH and M. SCHÖNBERG - A probable Example of multiple Production of Mesons . . . . .	" 92
DEMICHIELIS F. and R. MALVANO - Coincidence Investigation of the Spectrum from $^{14}_{83}\text{Bi}(\text{RaC})$ (L.) . . . . .	" 1106
DEMICHIELIS F. e R. MALVANO - Sul funzionamento di un particolare circuito a coincidenze (N. T.) . . . . .	" 1227
DE PIETRI C. (vedi BARBANTI SILVA L.) . . . . .	" 630
DE SABBATA V. (vedi PUPPI G.) . . . . .	" 726
DILWORTH C. (vedi DEMEUR M.) . . . . .	" 92
EL-FANDI M. G. (vedi ABD EL-WAHAB M.) . . . . .	" 734
EL-SHERBINI M. (vedi ABD EL-WAHAB M.) . . . . .	" 734
FACCHINI U. (vedi BRACCI A.) . . . . .	" 1237
FACCHINI U. (vedi COLLI L.) . . . . .	" 1183
FERRARI F. (vedi LEMENTEL E.) . . . . .	" 572
FERRARI F. e C. VILLI - Sulla teoria evaporativa delle disintegrazioni nucleari . . . . .	" 487
FERRARI F. e C. VILLI - Sui livelli energetici dei nuclei pesanti . . . . .	" 927
FERRETTI B. - Sugli stati isobarici dei nucleoni e la diffusione dei mesoni $\pi$ contro i protoni (L.) . . . . .	" 312
FERRONI S. (vedi BROVETTO P.) . . . . .	" 628
FERRONI S. - Relation between Even and Odd Couplings in Beta-Decay Theory . . . . .	" 1103
FIESCHI R. (vedi CALDIROLA P.) . . . . .	" 5
FILOSOFO I. (vedi BERETTA E.) . . . . .	" 317
FILOSOFO I. (vedi BRINI D.) . . . . .	" 505
FORD I. H. et E. E. PICCIOTTO - Étude des minéraux de terres rares par absorption neutronique . . . . .	" 141
FUBINI S. - Sull'operatore $U(t)$ di Dyson-Feynman . . . . .	" 846
FUBINI S. (vedi CAIANIELLO E. R.) . . . . .	" 1218
FUMI F. G. - Matter tensors in symmetrical systems . . . . .	" 739
FUMI F. G. - Photoelasticity in Crystals (L.) . . . . .	" 184
GALLONE S. e L. ORSONI - Sul regime transitorio dei reattori nucleari con diffusore . . . . .	" 269
GAMBA A. - Pion production and charge independence (L.) . . . . .	" 1305
GAMBA A. e G. VERDE - On a question of nuclear spectroscopy (L.) . . . . .	" 544
GATTI E. e E. GERMAGNOLI - Un nuovo metodo di coincidenza (L.) . . . . .	" 189

GATTI E., E. GERMAGNOLI, A. PERSANO and E. ZIMMER - Boron layer scintillation neutron detectors (N. T.) . . . . .	pag. 1012
GERMAGNOLI E. (vedi GATTI E.) . . . . .	" 189
GERMAGNOLI E. (vedi GATTI E.) . . . . .	" 1012
GIGLI A. (vedi AMALDI E.) . . . . .	" 453
GIGLI A. (vedi AMALDI E.) . . . . .	" 969
GIMENEZ C. et J. LABEYRIE - Fabrication et propriétés des compteurs de Geiger remplis à la vapeur de brome et destinés à la prospection $\beta$ et $\gamma$ . . . . .	" 169
GOLDSCHMIDT-CLERMONT Y. (vedi MERLIN M.) . . . . .	" 421
GROSJEAN C. C. - Note on the Diffraction of Light by a Finite Number of Centres Distributed at Random . . . . .	" 220
GULMANELLI P. (vedi CALDIROLA P.) . . . . .	" 5
GULMANELLI P. (vedi CALDIROLA P.) . . . . .	" 834
HOLMBERG B. - A remark on the uniqueness of the potential determined from the asymptotic phase . . . . .	" 597
HUYBRECHTS M. and M. SCHÖNBERG - Ionization at relativistic energies and polarization effects . . . . .	" 764
IBRAHIM A. A. K. and A. M. KABIEL - On the oscillating Cylinder Viscosimeter (L.) . . . . .	" 864
INGRAHAM R. L. - Conformal Relativity . . . . .	" 886
INÖNÜ E. and E. P. WIGNER - Representation of the Galilei Group . . . . .	" 705
KABIEL A. M. (vedi IBRAHIM A. A. K.) . . . . .	" 864
LABEYRIE J. (vedi GIMENEZ C.) . . . . .	" 169
LANZA G. (vedi BUDINI P.) . . . . .	" 381
LEPRI F. (vedi ALBERIGI A.) . . . . .	" 365
LEVI SETTI R. and G. TOMASINI - Slow Heavy Mesons from Cosmic Ray Stars (L.) . . . . .	" 1244
LOINGER A. - Sulle soluzioni dell'equazione di Dirac-Corben (L.) . . . . .	" 855
LOINGER A. - Un semplice modello di due campi interagenti . . . . .	" 1080
LOINGER A. (vedi BELLOMO E.) . . . . .	" 1240
LOVATI A., A. MURA and G. TAGLIAFERRI - Neutral Meson Production in Energetic Nuclear Encounters (L.) . . . . .	" 205
LOVATI A., A. MURA, G. TAGLIAFERRI and S. TERRANI - A Cloud Chamber Analysis of Cosmic Rays at 3500 metres - Part A: The Electrode Component from Nuclear Disintegrations in Lead . . . . .	" 946
LOVERA G. - Questioni statistiche sulla distribuzione angolare dei rami nelle stelle prodotte dalla radiazione cosmica . . . . .	" 134
LOVERA G. - Formula per le frequenze di vibrazione delle molecole biatomiche dei metalli alcalini (L.) . . . . .	" 442
LOVERA G. - Sull'anomalia nella distribuzione angolare intrinseca dei rami nelle stelle prodotte dalla radiazione cosmica (L.) . . . . .	" 857
LOVERA G. - Sulle frequenze di vibrazione delle molecole biatomiche formate con atomi del 4°, 5°, 6°, 7° gruppo . . . . .	" 541
LOVERA G. (vedi BARBANTI SILVA L.) . . . . .	" 630
MALVANO R. (vedi DEMICHELIS F.) . . . . .	" 1106
MALVANO R. (vedi DEMICHELIS F.) . . . . .	" 1227
MALVICINI A. - Rivelatore a scintillazione per particelle $\alpha$ (N. T.) . . . . .	" 535
MALVICINI A. - (vedi BRACCI A.) . . . . .	" 1237
MANARESI E. (vedi PUPPI G.) . . . . .	" 706



MANDÒ M. e L. RONCHI jr. — Sulla perdita di energia di mesoni veloci per creazione di coppie . . . . .	pag. 105
MANDÒ M. and L. RONCHI jr. — On the Energy Range Relation for fast Muons in Rock . . . . .	517, 1036
MANDUCHI C. (vedi BASSI P.) . . . . .	» 358
MANDUCHI C. (vedi BASSI P.) . . . . .	» 722
MANDUCHI C. (vedi BASSI P.) . . . . .	» 861
MANDUCHI C. (vedi BASSI P.) . . . . .	» 1037
MANFREDINI A. (vedi CORTINI G.) . . . . .	» 191
MANFREDINI A. (vedi CORTINI G.) . . . . .	» 659
MARCHETTI C. (vedi CERRAI E.) . . . . .	» 503
MARCHETTI C. (vedi CERRAI E.) . . . . .	» 511
MARCHETTI C. e M. SILVESTRI — L'impianto ideale per la separazione degli isotopi . . . . .	» 97
MERLIN M. (vedi DALLAPORTA N.) . . . . .	» 202
MERLIN M., B. VITALE e Y. GOLDSCHMIDT-CLERMONT — Misura dell'eccesso positivo a bassa energia mediante sandwich di lastre nucleari in campo magnetico . . . . .	» 421
MILONE A. (vedi BARONI G.) . . . . .	» 867
MILONE C. — Sullo spettro di energia degli elettroni negli sciami estesi di raggi cosmici . . . . .	» 549
MILONE C. — Sulle particelle penetranti negli sciami estesi dei raggi cosmici e la fase di sviluppo degli sciami . . . . .	» 637
MILONE TAMBURINO S. e A. STELLA — Determinazione della radioattività di una pegmatite di Delianova, mediante emulsioni nucleari esposte a strati di roccia polverizzata e compressa ed a sezioni sottili . . . . .	» 253
MILONE TAMBURINO S. e A. STELLA — Sulla radioattività delle lave etnee . . . . .	» 1044
MONTICELLI F. — Sui metodi di soluzione delle equazioni della cascata elettrofotonica . . . . .	» 477
MORPURGO G. — Sulla corrispondenza tra elettrodinamica classica e quantistica . . . . .	» 808
MORPURGO G. — Sull'energia di legame dell' $H^3$ e dell' $He^4$ . . . . .	» 461
MOTZO M. — Curve teoriche di risonanza nell'interazione tra onde elettromagnetiche per incidenza verticale nella ionosfera . . . . .	» 213
MUKERJI S. K. and BANARSI LAL — On the Raman Spectra of p-diphenylbenzene in various solutions . . . . .	» 413
MUKERJI S. K. and BANARSI LAL — On the Raman Spectra of Tianthrene in various solutions . . . . .	» 699
MÜLLER R. und P. STOLL — Kernphotospaltung am $B^{10}$ und $B^{11}$ durch $\gamma$ Strahlen bis 31 MeV (L.) . . . . .	» 1232
MURA A. (vedi LOVATI A.) . . . . .	» 205
MURA A. (vedi LOVATI A.) . . . . .	» 946
MUSUMECI L. — Sull'aberrazione degli spettrometri di massa a settore magnetico . . . . .	» 429
OLBERT S. (vedi ANNIS M.) . . . . .	» 624
ORSONI L. (vedi GALLONE S.) . . . . .	» 269
PAGANELLI M. e G. QUARENI — Sullo schema di disintegrazione del $K^{40}$ . . . . .	» 324
PANCINI E. (vedi ALBERIGI QUARANTA A.) . . . . .	» 959
PEASLEE D. C. — Cosmic Ray Evidence on the $\mu$ -meson Magnetic Moment . . . . .	» 56
PEASLEE D. C. — Cosmic Rays Underground . . . . .	» 61

PERILLI FEDELI R. (vedi BARBANTI SILVA L.) . . . . .	pag. 630
PERSANO A. (vedi GATTI E.) . . . . .	" 1012
PERSICO E. - A new Resistor Network for the Integration of Laplace's Equation . . . . .	" 74
PETRALIA S. - Interferometria ultrasonora nei gas - (II): Dispersione ultrasonora nel cloruro di metile . . . . .	" 351
PETRALIA S. - Interferometria ultrasonora nei gas - (III): Velocità e assorbimento di ultrasuoni nell'anidride solforosa . . . . .	" 818
PICCIOTTO E. E. (vedi FORD I. H.) . . . . .	" 141
PIERUCCI O. (vedi DALLAPORTA N.) . . . . .	" 202
POIANI G. (vedi BUDINI P.) . . . . .	" 199
POIANI G. e C. VILLI - Sulle probabilità di localizzazione degli elettroni negli sciami estesi . . . . .	" 825
POIANI G. e C. VILLI - Sullo sparpagliamento laterale degli sciami alle basse energie . . . . .	" 1109
PORRECA F. (vedi CARRELLI A.) . . . . .	" 90
PORRECA F. - Sulla propagazione di sottili fasci luminosi in liquidi attraversati da ultrasuoni . . . . .	" 274
PUPPI G., V. DE SABBATA e E. MANARESI - Eccitazione dei nuclei per assorbimento dei mesoni $\pi$ - I: Considerazioni generali . . . . .	" 726
QUARENI G. (vedi PAGANELLI M.) . . . . .	" 324
QUERZOLI R. (vedi AGENO M.) . . . . .	" 282
QUERZOLI R. (vedi AGENO M.) . . . . .	" 1242
RAMAT M. (vedi DELLA CORTE M.) . . . . .	" 605
RESCIGNO L. (vedi CARRELLI A.) . . . . .	" 1
RESCIGNO L. (vedi CARRELLI A.) . . . . .	" 618
RESCIGNO L. (vedi CARRELLI A.) . . . . .	" 719
RIMONDI O. (vedi BRINI D.) . . . . .	" 505
RONCHI L. jr. (vedi MANDÒ M.) . . . . .	" 105
RONCHI L. jr. (vedi MANDÒ M.) . . . . .	" 517
ROSSI B. (vedi ANNIS M.) . . . . .	" 624
ROSTAGNI A. (vedi DALLAPORTA N.) . . . . .	" 202
SANTANGELO M. (vedi BOTAO G.) . . . . .	" 44
SCARSI L. (vedi BARONI G.) . . . . .	" 867
SCHAFROTH M. R. - Coulomb Interaction and the Meissner-Ochsenfeld effect . . . . .	" 291
SCHÖNBERG M. (vedi DEMEUR M.) . . . . .	" 92
SCHÖNBERG M. - The Theory of ionization and the emission of Cerenkov radiation (L.) . . . . .	" 210
SCHÖNBERG M. - Ionization Loss at Relativistic Energies and Polarization Effects (L.) . . . . .	" 372
SCHÖNBERG M. (vedi HUYBRECHTS M.) . . . . .	" 764
SCHÖNBERG M. - Application of second quantization methods to the classical statistical mechanics (I) . . . . .	" 1139
SCHUMANN W. O. - Über die Ausbreitung sehr langer elektrischer Wellen um die Erde und die Signale des Blitzes . . . . .	" 1116
SCIUTI S. (vedi AMALDI E.) . . . . .	" 453
SCIUTI S. (vedi AMALDI E.) . . . . .	" 969
SEGRÈ E. - The problem of the stability of technetium . . . . .	" 1008
SEGRÈ G. - Sulle particelle $\alpha$ nella radiazione cosmica primaria . . . . .	" 116
SEGRÈ G. (vedi CORTINI G.) . . . . .	" 191



SEGRÈ G. (vedi CORTINI G.) . . . . .	pag. 659
SILVESTRI M. (vedi MARCHETTI C.) . . . . .	» 97
SILVESTRI M. (vedi CERRAI E.) . . . . .	» 511
SILVESTRI M. (vedi CERRAI E.) . . . . .	» 530
SOMMACAL B. (vedi BERETTA E.) . . . . .	» 317
STELLA A. (vedi MILONE TAMBURINO S.) . . . . .	» 253
STELLA A. (vedi MILONE TAMBURINO S.) . . . . .	» 1044
STOLL P. (vedi MÜLLER R.) . . . . .	» 1232
STOPPINI G. (vedi ALBERIGI A.) . . . . .	» 365
SUCCI G. and G. TAGLIAFERRI - On the Operation of the Diffusion Cloud Chamber (N. T.) . . . . .	» 1092
TAGLIAFERRI G. (vedi LOVATI A.) . . . . .	» 205
TAGLIAFERRI G. (vedi LOVATI A.) . . . . .	» 946
TAGLIAFERRI G. (vedi SUCCI G.) . . . . .	» 1092
TARTAGLIONE E. (vedi CARRELLI A.) . . . . .	» 440
TA-YOU-WU (vedi CORINALDESI E.) . . . . .	» 436
TERRANI S. (vedi LOVATI A.) . . . . .	» 946
TIERRAUX Ch. - Meson production with Latitude Cut-Off (L.) . . . . .	» 1029
TOMASINI G. (vedi LEVI SETTI R.) . . . . .	» 1244
TRAINOR L. (vedi CORINALDESI E.) . . . . .	» 436
TRAINOR L. (vedi CORINALDESI E.) . . . . .	» 940
VALLE G. - Teoria della tensione di scarica fra elettrodi cilindrici coassiali in campo magnetico trasversale . . . . .	» 145
VANDERHAEGHE G. (vedi BARONI G.) . . . . .	» 867
VERDE M. - Accoppiamento spin-orbita e polarizzazione di neutroni (L.) . . . . .	» 376
VERDE M. (vedi GAMBA A.) . . . . .	» 544
VERONESI P. (vedi BASSI P.) . . . . .	» 722
VILLI C. (vedi FERRARI F.) . . . . .	» 487
VILLI C. (vedi POIANI G.) . . . . .	» 825
VILLI C. (vedi FERRARI F.) . . . . .	» 927
VILLI C. (vedi POIANI G.) . . . . .	» 1109
VITALE B. (vedi MERLIN M.) . . . . .	» 421
VOLPI G. (vedi BOATO G.) . . . . .	» 539
WATAGHIN G. - On the Quantum Theory of Fields (II) (L.) . . . . .	» 208
WATAGHIN G. (vedi BERTOLINO G.) . . . . .	» 407
WIGNER E. P. (vedi INÖNÜ E.) . . . . .	» 705
WILSON J. C. - Theory and Use of Statistical Methods in the Determination of Symmetry and Structure of Crystals . . . . .	» 50
WIŚNIEWSKI F. J. - Une déduction non ondulatoire des formules de la diffusion des particules sur un cristal (L.) . . . . .	» 186
WIŚNIEWSKI F. J. - Théorie mécanique de la diffusion des particules par les réseaux (L.) . . . . .	» 620
ZIMMER E. (vedi GATTI E.) . . . . .	» 1012

# INDICE ANALITICO PER MATERIA

## ACUSTICA (ULTRASUONI)

Interferometria ultrasonora nei gas - (II): dispersione ultrasonora nel cloruro di metile, <i>S. Petralia</i> . . . . .	pag. 351
Interferometria ultrasonora nei gas - (III): Velocità e assorbimento di ultrasuoni nell'anidride solforosa, <i>S. Petralia</i> . . . . .	» 818
Propagazione di sottili fasci luminosi in liquidi attraversati da ultrasuoni, <i>F. Porreca</i> . . . . .	» 274
Ultrasonic Grating remaining after stopping the Supersonic Waves (L.). <i>A. Carrelli e F. Porreca</i> . . . . .	» 90

## CONDUCIBILITÀ ELETTRICA E SUPERCONDUTTIVITÀ

Conducibilità in alta frequenza con soluzioni viscosse (misure), <i>A. Carrelli e L. Rescigno</i> . . . . .	» 618
Conducibilità di elettroliti forti e deboli in alta frequenza (misure). <i>A. Carrelli e L. Rescigno</i> . . . . .	» 719
Costante dielettrica di soluzioni saline acquose in alta frequenza (misure), <i>A. Carrelli e L. Rescigno</i> . . . . .	» 1
Coulomb Interaction and the Meissner-Ochsenfeld effect, <i>M. S. Schajroth</i> . . . . .	» 291

## COSMICA (RADIAZIONE)

Anomalies of the absorption curve of cosmic radiation in lead (L.), <i>M. Abd El-Wahab Khalil</i> . . . . .	» 1248
Sull'anomalia della distribuzione angolare dei rami nelle stelle prodotte dalla radiazione cosmica (L.), <i>G. Lovera</i> . . . . .	» 857
Aumento dell'intensità dei raggi cosmici al livello del mare durante le tempeste di sabbia (L.), <i>M. Abd El-Wahab, L. Allegretti, M. G. El Fandi e M. El-Sherbini</i> . . . . .	» 734
Cascata elettrofotonica (metodi di riduzione della equazione della), <i>F. Monticelli</i> . . . . .	» 477
Composante molle du rayonnement cosmique (étudiée au Pic du Midi), <i>G. Baroni, G. Cortini, A. Milone, L. Scarsi et G. Vanderhaeghe</i> . . . . .	» 867
Cloud Chamber Analysis of Cosmic Rays at 3500 Metres - Part A: The Electronic Component from Nuclear Disintegrations in Lead, <i>A. Lovati, A. Mura, G. Tagliaferri and S. Terrani</i> . . . . .	» 946
Componente « N » dei raggi cosmici alle alte energie, <i>P. Budini e G. Lanza</i> . . . . .	» 381
Componente fotonica degli sciami estesi dell'aria, <i>P. Bassi, A. M. Bianchi e C. Manduchi</i> . . . . .	» 358
Componente nucleonica nell'atmosfera (II), <i>E. Clementel e F. Ferrari</i> . . . . .	» 572
Cosmic Rays Underground, <i>D. C. Peaslee</i> . . . . .	» 61
Distribuzione angolare dei rami nelle stelle prodotte dalla radiazione cosmica (questioni statistiche sulla), <i>G. Lovera</i> . . . . .	» 134

Distribuzione anomala delle stelle di disintegrazione prodotte dalla radiazione cosmica nelle emulsioni fotografiche (L.), <i>L. Barbanti Silva, C. Bonacini, C. De Pietri, G. Lovera e R. Perilli Fedeli</i> . . .	pag. 630
Distribuzione zenitale della componente nucleonica di media energia, <i>P. Bassi, G. Manduchi e P. Veronesi</i> . . . . .	» 722
Distribuzione zenitale delle particelle degli sciami estesi. <i>P. Bassi, A. M. Bianchi, D. Cadorin e C. Manduchi</i> . . . . .	» 1037
Eccesso positivo verticale ed inclinato dei mesoni, <i>E. Beretta, I. Filosofo e B. Sommacal</i> . . . . .	» 317
Eccesso positivo a bassa energia (misura mediante sandwich di lastre nucleari in campo magnetico), <i>M. Merlin, B. Vitale e Y. Goldschmidt-Clermont</i> . . . . .	» 421
Energy Range Relation for fast Muons in Rock, <i>M. Mandò and L. Ronchi jr.</i> . . . .	517, 1036
Frequency of small cosmic-ray Bursts (New barometric and temperature Coefficients), <i>J. W. Broxon</i> . . . . .	» 1054
Generazione di mesoni $\pi$ in Piombo ed Alluminio esposti ai raggi cosmici (L.), <i>N. Dallaporta, M. Merlin, O. Pierucci e A. Rostagni</i> . . . .	» 202
Interaction of Cosmic Rays with Matter under 50 metres water equivalent (L.), <i>E. Amaldi, C. Castagnoli, A. Gigli e S. Sciuti</i> . . . .	» 453
Interaction of Cosmic Rays with Matter under 50 metres water equivalent, <i>E. Amaldi, G. Castagnoli, A. Gigli and S. Sciuti</i> . . . .	» 969
Meson production with Latitude Cut-Off (L.), <i>Ch. Theriaux</i> . . . .	» 1029
Neutral Meson Production in Energetic Nuclear Encounters (L.), <i>A. Lovati, A. Mura and G. Tagliaferri</i> . . . . .	» 205
Nuclear explosions produced by primary protons in emulsions exposed in the high atmosphere, <i>G. Cortini, A. Manfredini and G. Segrè</i> .	» 659
Particelle $\alpha$ nella radiazione cosmica primaria, <i>G. Segrè</i> . . . . .	» 116
Particelle penetranti negli sciami estesi dei raggi cosmici e le fasi di sviluppo degli sciami, <i>C. Milone</i> . . . . .	» 637
Phenomenological Theory of Cosmic Radiation in the Atmosphere, <i>P. Caldirola, R. Fieschi e P. Gulmanelli</i> . . . . .	» 5
Probabilità di localizzazione degli elettroni negli sciami estesi, <i>G. Poiani e C. Villi</i> . . . . .	» 825
Produzione multipla di mesoni negli sciami penetranti, <i>G. Bertolino, M. Cini, P. Colombino e G. Wataghin</i> . . . . .	» 407
Slow heavy mesons from cosmic ray stars (L.), <i>R. Levi Setti and G. Tomasini</i> . . . . .	» 1244
Sparpagliamento laterale degli sciami alle basse energie. <i>G. Poiani e C. Villi</i> . . . . .	» 1109
Spettro dei mesoni $\mu$ al livello del mare, <i>D. Brini, O. Rimondi e I. Filosofo</i> .	» 505
Spettro di energia degli elettroni negli sciami estesi di raggi cosmici, <i>C. Milone</i> . . . . .	» 549
Spettro di energia della componente nucleonica a varie quote (L.), <i>G. Cortini, A. Manfredini e G. Segrè</i> . . . . .	» 191
$\mu$ -meson Magnetic Moment (cosmic ray evidence on the), <i>D. C. Peaslee</i> .	» 56

## CRISTALLI

Determination of symmetry and structure of crystals (theory and use of statistical methods), <i>J. C. Wilson</i> . . . . .	» 50
--	------

Diffraction des particules sur un crystal (déduction non ondulatoire des formules de la) (L.), <i>F. J. Wisniewski</i> . . . . .	pag. 186
Fluorescenza destata da particelle alfa nello stilbene (L.), <i>M. Ageno e G. Cortellessa</i> . . . . .	" 196
Matter tensors in symmetrical systems, <i>F. G. Fumi</i> . . . . .	" 739
Photoelasticity in Crystals (L.), <i>F. G. Fumi</i> . . . . .	" 184

## ELETTROSTATICA

Capacità di un condensatore sferico (L.), <i>F. Bertolini</i> . . . . .	" 852
Teoria della tensione di scarica fra elettrodi cilindrici coassiali in campo magnetico trasversale, <i>G. Valle</i> . . . . .	" 145

## GEOFISICA

Concentrazione in deuterio dell'acqua di condensa di un soffione bora-cifero di Larderello, <i>E. Cerrai, C. Marchetti e M. Silvestri</i> . . . . .	" 511
Étude des minéraux de terres rares par absorption neutronique, <i>I. H. Ford et E. E. Picciotto</i> . . . . .	" 141
Radioattività di una pegmatite di Delianova (determinata mediante), <i>S. Milone Tamburino e A. Stella</i> . . . . .	" 253
Radioattività delle lave etnee, <i>S. Milone Tamburino e A. Stella</i> . . . . .	" 1044

## IONIZZAZIONE ED EFFETTO CERENKOV

Cerenkov light (intensity measurements), <i>P. Bassi, A. M. Bianchi and C. Manduchi</i> . . . . .	" 861
Ionization Loss at Relativistic Energies and Polarization Effects (L.), <i>M. Schönberg</i> . . . . .	" 372
Ionization at relativistic energies and polarization effects, <i>M. Huybrechts and M. Schönberg</i> . . . . .	" 764
Sull'aumento della ionizzazione specifica primaria alle alte energie (L.), <i>P. Budini e G. Poiani</i> . . . . .	" 199
Ionizzazione totale delle particelle del polonio in argon e azoto, <i>G. Bertolini, M. Bettoni e A. Bisi</i> . . . . .	" 1004
Theory of ionization and the emission of Cerenkov radiation (L.), <i>M. Schönberg</i> . . . . .	" 210

## MAGNETISMO

Transizioni proibite negli spettri di risonanza paramagnetica degli allumi di cromo (L.), <i>P. Brovetto e S. Ferroni</i> . . . . .	" 628
---	-------

## MECCANICA

Théorie mécanique de la diffusion des particules par des réseaux (L.), <i>F. J. Wisniewski</i> . . . . .	" 620
--	-------

## MESONI

Cattura nucleare del mesone $\mu$ (L.), <i>P. Budini</i> . . . . .	" 445
--	-------

Disintegration of $\pi$ -mesons in Carbon, <i>A. Alberigi Quaranta and E. Pancini</i> . . . . .	pag. 959
Eccitazione di nuclei per assorbimento dei mesoni $\pi^-$ - I: Considerazioni generali, <i>G. Puppi, V. De Sabbata e E. Manaresi</i> . . . . .	726
Interazione di mesoni $\mu$ con la materia nucleare, <i>E. Clementel</i> . . . . .	369
Multiple production of mesons (a probable example of), <i>M. Demeur, C. Dilworth and M. Schönberg</i> . . . . .	92
Neutral meson production in energetic nuclear encounters (L.), <i>A. Lovati, A. Mura and G. Tagliaferri</i> . . . . .	205
Non-Adiabatic Method with a Neutral Pseudo-Scalar Meson Field, <i>D. Baroncini</i> . . . . .	642
Perdita di energia di mesoni veloci per creazione di coppie, <i>M. Mandò e L. Ronchi jr.</i> . . . . .	105
Pion production and charge independence (L.), <i>A. Gamba</i> . . . . .	1032
S-Particles (L.), <i>M. Annis, H. Bridge, M. Courant, S. Olbert and B. Rossi</i> . . . . .	624
Stati isobarici dei nucleoni e diffusione dei mesoni $\pi$ contro i protoni (L.), <i>B. Ferretti</i> . . . . .	312
Vita media dei mesoni $\mu^+$ e $\mu^-$ (L.), <i>N. Dallaporta</i> . . . . .	449
$\mu$ -meson Magnetic Moment (cosmic ray evidence on the), <i>D. C. Peaslee</i> . . . . .	56

## METODI E APPARATI

Aberrazione degli spettrometri di massa a settore magnetico (N. T.), <i>L. Musumeci</i> . . . . .	429
Boron layer scintillation neutron detectors (N. T.), <i>E. Gatti, E. Germagnoli, A. Persano and E. Zimmer</i> . . . . .	1012
Camera di ionizzazione a bassa capacità (N. T.), <i>G. Bertolini e A. Bisi</i> . . . . .	1022
Contatori a radiazione di Cerenkov (questioni tecniche sui), <i>P. Bassi e A. M. Bianchi</i> . . . . .	1087
Compteurs de Geiger remplis à la vapeur de brome et destinés à la prospection $\beta$ et $\gamma$ (fabrication et propriétés) (N. T.), <i>C. Gimenez et J. Labeyrie</i> . . . . .	169
Funzionamento di un particolare circuito a coincidenze (N. T.), <i>F. Demichelis e R. Malvano</i> . . . . .	1227
Invecchiamento di scintillatori liquidi (un caso di) (L.), <i>M. Ageno, G. Cortellessa e R. Querzoli</i> . . . . .	1242
Metodo del galleggiante applicato alla misura rapida della concentrazione in $D_2O$ di soluzioni acquose di acqua pesante (N. T.), <i>E. Cerrai, C. Marchetti e M. Silvestri</i> . . . . .	530
Nuovo metodo di coincidenza (L.), <i>E. Gatti e E. Germagnoli</i> . . . . .	189
Operation of the Diffusion Cloud Chamber, <i>C. Succi and G. Tagliaferri</i> . . . . .	1092
Oscillating Cylinder Viscosimeter (L.), <i>A. A. K. Ibrahim and A. M. Kabil</i> . . . . .	864
Photometric Measurements on Tracks in Nuclear Emulsions (N. T.), <i>M. Della Corte and M. Ramat</i> . . . . .	605
Regime transitorio dei reattori nucleari con diffusione, <i>S. Gallone e L. Orsoni</i> . . . . .	269
Resistor Network for the Integration of Laplace's Equation (a new) (L.), <i>E. Persico</i> . . . . .	74



Rivelazione di sciami di particelle mediante contatori a scintillazione (N. T.), <i>R. Ascoli</i> . . . . .	pag. 610
Rivelatore a scintillazione per particelle, <i>A. Malvicini</i> . . . . .	» 535
Scarica nei contatori ad argon (meccanismo della), <i>L. Colli</i> e <i>U. Facchini</i> . . . . .	» 1183
Selettore temporale di impulsi elettronico (uno speciale) (N. T.), <i>A. Alberigi</i> , <i>F. Lepri</i> e <i>G. Stoppini</i> . . . . .	» 365
Separazione degli isotopi (l'impianto ideale per la), <i>G. Marchetti</i> e <i>M. Silvestri</i> . . . . .	» 97
Stabilizzazione dei fotomoltiplicatori (su di un dispositivo per la) (N. T.), <i>R. Ascoli</i> . . . . .	» 615

## MOLECOLE

Diffrazione di Raggi X da parte di soluzioni acquose di zucchero caramellato (L.), <i>A. Carrelli</i> e <i>E. Tartaglione</i> . . . . .	» 440
Formula per le frequenze di vibrazione delle molecole biatomiche dei metalli alcalini (L.), <i>G. Lovera</i> . . . . .	» 442
Frequenze di vibrazione delle molecole biatomiche formate con atomi del 4°, 5°, 6°, 7° gruppo (L.), <i>G. Lovera</i> . . . . .	» 541
Raman Spectra of p-diphenylbenzene in various solutions, <i>S. K. Mukerji</i> and <i>Banarsi Lal</i> . . . . .	» 413
Raman Spectra of Thianthrene in various solutions, <i>S. K. Mukerji</i> and <i>Banarsi Lal</i> . . . . .	» 699

## NUCLEI (FISICA NUCLEARE)

Accoppiamento spin-orbita e polarizzazione di neutroni (L.), <i>M. Verde</i> . . . . .	» 376
Argon Isotopes in Natural Gases, <i>G. Boato</i> , <i>G. Careri</i> and <i>M. Santangelo</i> . . . . .	» 44
Eccitazione dei nuclei per assorbimento dei mesoni $\pi^-$ - I: Considerazioni generali, <i>G. Puppi</i> , <i>V. De Sabbata</i> e <i>M. Manaresi</i> . . . . .	» 726
Energia del legame dell' $H^3$ e dell' $He^4$ , <i>G. Morpurgo</i> . . . . .	» 461
Hydrogen Isotopes in Steam Wells (L.), <i>G. Boato</i> , <i>G. Careri</i> and <i>G. Volpi</i> . . . . .	» 539
Kernphotospaltung am $B^{10}$ und $B^{11}$ durch $\gamma$ -Strahlen bis 31 MeV (L.), <i>R. Müller</i> und <i>P. Stoll</i> . . . . .	» 1232
Livelli energetici dei nuclei pesanti, <i>F. Ferrari</i> e <i>C. Villi</i> . . . . .	» 927
Nuclear spectroscopy (on a question of) (L.), <i>A. Gamba</i> and <i>M. Verde</i> . . . . .	» 544
Relation between Even and Odd Couplings in Beta-Decay Theory (L.), <i>S. Ferroni</i> . . . . .	» 1103
Spettro della radiazione $\gamma$ emessa nella reazione $^{10}B(n, \alpha)^7Li^*$ , $^7Li^* \rightarrow ^7Li + \gamma$ (L.), <i>A. Bracci</i> , <i>U. Facchini</i> e <i>A. Malvicini</i> . . . . .	» 1237
Stability of technetium, <i>E. Segrè</i> . . . . .	» 1008
Superposition Method in Mass Spectrometry, <i>G. Careri</i> . . . . .	» 128
Teoria evaporativa delle disintegrazioni nucleari, <i>F. Ferrari</i> e <i>C. Villi</i> . . . . .	» 487

## ONDE ELETTROMAGNETICHE

Ausbreitung sehr langer elektrischer Wellen um die Erde und die Signale des Blitzes, <i>W. O. Schumann</i> . . . . .	» 1116
Calcolo di un filtro birifrangente (N. T.), <i>L. Berti</i> . . . . .	» 304



Curve di risonanza nel moto degli elettroni lenti dell'alta atmosfera (determinazione sperimentale), <i>M. Cutolo</i> . . . . .	pag. 391
Interazione fra onde ed elettroni liberi sottoposti al campo magnetico terrestre (su di un nuovo fenomeno di), <i>M. Cutolo</i> . . . . .	» 687
Risonanza nell'interazione tra onde elettromagnetiche per incidenza verticale nella ionosfera (curve teoriche), <i>M. Motzo</i> . . . . .	» 213

## OTTICA

Diffraction of light by a Finite Number of Centres Distributed at Random, <i>C. C. Grosjean</i> . . . . .	» 220
---	-------

## QUANTISTICA (TEORIE GENERALI)

Algorithm of Dirac Spurs, <i>E. R. Caianiello</i> and <i>S. Fubini</i> . . . . .	» 1218
Campi interagenti (un semplice modello di), <i>A. Loinger</i> . . . . .	» 1080
Commutation laws in the theory of quantized fields (L.), <i>M. Cini</i> . . . . .	» 1025
Corrispondenza fra elettrodinamica classica e quantistica, <i>G. Morpurgo</i> . . . . .	» 508
Current density in quantum electrodynamics, <i>H. C. Corben</i> . . . . .	» 1071
Current Fluctuation in Quantum Electrodynamics (L.), <i>E. Corinaldesi</i> . . . . .	» 194
Equivalenza fisica dell'equazione di Dirac-Corben con l'equazione di Dirac (L.), <i>E. Bellomo</i> e <i>A. Loinger</i> . . . . .	» 1240
Evaluation of Integrals in the Theory of Atomic Scattering of Electrons, <i>E. Corinaldesi</i> and <i>L. Trainor</i> . . . . .	» 940
Fermion types and ensuing Selection Rules, <i>E. R. Caianiello</i> . . . . .	» 336
Interazioni non localizzabili. Esempio dell'effetto Compton, <i>R. Aseoli</i> . . . . .	» 757
Operatore di Dyson-Feynman, <i>S. Fubini</i> . . . . .	» 846
Oppenheimer approximation for the scattering of electrons (L.), <i>E. Corinaldesi</i> , <i>L. Trainor</i> and <i>Ta-You-Wu</i> . . . . .	» 436
Quantum Theory of Fields (II) (L.), <i>G. Wataghin</i> . . . . .	» 208
Reformulation of Field Theory, <i>H. C. Corben</i> . . . . .	» 580
Representation of the Galilei Group, <i>E. Inönü</i> and <i>E. P. Wigner</i> . . . . .	» 705
Second quantization methods, applied to the classical statistical mechanics (I), <i>M. Schönberg</i> . . . . .	» 1139
Soluzioni dell'equazione di Dirac-Corben (L.), <i>A. Loinger</i> . . . . .	» 855
Su una nuova equazione ondulatoria per una particella a spin 1/2, <i>P. Caldirola</i> e <i>P. Gulmanelli</i> . . . . .	» 834
Unified field theory with varying charge and rest-mass, <i>H. C. Corben</i> . . . . .	» 235
A remark on the uniqueness of the potential determined from the asymptotic phase, <i>B. Holmberg</i> . . . . .	» 597

## RADIOATTIVITÀ

Coincidence Investigation of the Spectrum from $^{214}_{83}\text{Bi}(\text{RaC})$ (L.), <i>F. Demichelis</i> and <i>R. Malvano</i> . . . . .	» 1106
Schema di disintegrazione del $\text{K}^{40}$ , <i>M. Paganelli</i> e <i>G. Quarenzi</i> . . . . .	» 324

## RELATIVITÀ

Conformal Relativity, <i>L. Ingraham</i> . . . . .	» 886
--	-------

## SCINTILLAZIONI IN SOLUZIONI

- Luminescenza di soluzioni per effetto di raggi  $\gamma$  rivelata mediante un fotomoltiplicatore 931A, A. Ciccone . . . . . pag. 36, 316  
 Meccanismo delle scintillazioni nelle soluzioni. M. Ageno e R. Querzoli pag. 282

## INDICE DELLE RECENSIONI

R. M. BOZORTH - <i>Ferromagnetism</i> . . . . .	pag. 95
F. HENNING - <i>Von tiefen und hohen Temperaturen</i> . . . . .	» 212
<i>Colloques du Centre National de la Recherche Scientifique. XXX: Réarrangements moléculaires et inversion de Walden</i> . . . . .	» 314
G. ABETTI - <i>Keplero</i> . . . . .	» 314
GRIMSEHL - <i>Lehrbuch der Physik; Band II: Elektromagnetisches Feld</i> . .	» 380
W. WEIZEL - <i>Lehrbuch der theoretischen Physik</i> . . . . .	» 456
O. F. MOSSOTTI - <i>Scritti</i> . . . . .	» 457
E. LOHR - <i>Vektor und Dyaden Rechnung für Physiker und Techniker</i> . .	» 458
EUGEN BODEA - <i>Giorgis rationales MKS-Mass-System mit Dimensionskohärenz</i> . . . . .	» 459
LUIGI PUCCIANI - <i>Storia della fisica</i> . . . . .	» 459
LÖSCH-SCHOBLIK - <i>Die Fakultät und verwandte Funktionen</i> . . . . .	» 547
B. BELLION, F. DE MICHELIS - <i>L'energia atomica e sue applicazioni biologiche. Introduzione all'impiego degli isotopi in biologia e medicina</i> . .	» 633
LOUIS DE BROGLIE - <i>Particules de spin 1/2</i> . . . . .	» 635
RICHARD VON MISES - <i>Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit</i> . . . .	» 635
<i>Epistolario di Alessandro Volta</i> . . . . .	» 736
C. D. ROCHESTER and I. G. WILSON - <i>Cloud chamber Photographs of the Cosmic Radiation</i> . . . . .	» 1035
C. MÖLLER - <i>The Theory of Relativity</i> . . . . .	» 1250
H. S. W. MASSEY e E. H. S. BURHOP - <i>Electronic and Ionic Impact Phenomena</i> . . . . .	» 1252
A. MERCIER - <i>Leçons sur les principes de l'électrodynamique classique</i> . . .	» 1253

Fine del Volume IX, Serie IX, 1952

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA

Direttore responsabile: G. POLVANI

Tipografia Compositori - Bologna

Questo fascicolo è stato licenziato dai torchi il 25-XI-1952

